

Instituto de Física
Universidade de São Paulo
GABARITO - Prova 1

4302112 - Física II

22/set/2025

Questão 1 (5 pontos) Uma caixa sem tampa está ligada a uma mola horizontal que obedece à lei de Hooke. Dentro da caixa há uma pedra, com massa comparável à da caixa. O sistema é posto para oscilar e, subitamente, quando a caixa está na sua posição mais afastada do ponto de equilíbrio da mola, a pedra é retirada da caixa. Considerando o sistema após a retirada da pedra, assinale a alternativa **errada**.

- (a) O período de oscilação permanece inalterado.
- (b) A amplitude de oscilação permanece inalterada.
- (c) A energia mecânica total do sistema permanece inalterada.
- (d) A energia potencial máxima permanece inalterada.
- (e) A magnitude da velocidade máxima aumenta.

Resolução:

1. Trata-se de um sistema massa-mola realizando um movimento harmônico simples (MHS). Tal movimento obedece as seguintes expressões,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T},$$

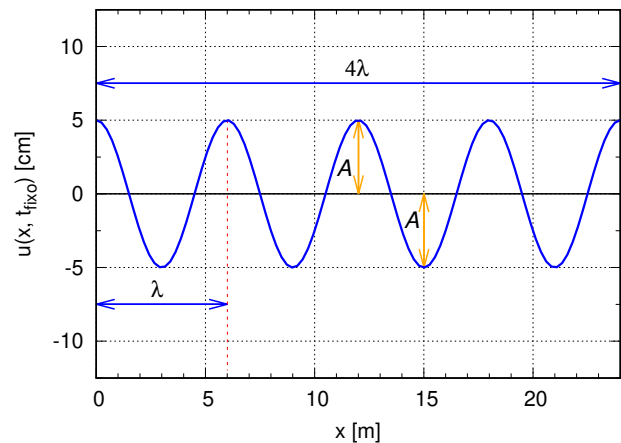
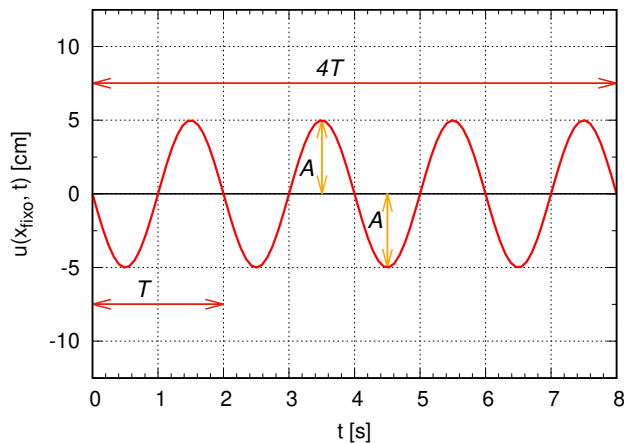
sendo k a constante elástica da mola, m a massa total do conjunto acoplado à mola, ω_0 , T e A são, respectivamente, a frequência angular, o período e a amplitude de oscilação, e ϕ , a fase do MHS. As expressões acima nos dizem que, ao retirarmos a pedra da caixa, o período de oscilação diminui, portanto, a alternativa (a) acima está errada.

Quanto às demais alternativas: (b), (c) e (d) estão corretas, pois a pedra é retirada da caixa na posição mais afastada do ponto de equilíbrio. Assumindo o ponto de equilíbrio na origem, tal posição mais afastada poderia ser $-A$ ou $+A$, posições em que a energia cinética é nula e a energia potencial, igual à energia total, é dada por $U_{\max} = kA^2/2$. Veja que retirar a pedra em uma destas posições não altera $U_{\max}$ (que não depende da massa), nem a energia mecânica total (que nestas posições, é igual a $U_{\max}$), nem a amplitude de oscilação (já que esta seria, a menos do sinal, a posição inicial, a partir do repouso, do movimento do sistema mola + caixa vazia).

Quanto ao item (e), a magnitude da velocidade é máxima quando a energia cinética é máxima, portanto, igual à energia mecânica total. A energia cinética máxima é a mesma nos dois casos, mas como ela é dada pela massa total vezes o quadrado da velocidade máxima dividido por dois, a

diminuição da massa pela retirada da pedra faz a velocidade máxima da caixa ser maior que no caso da caixa com a pedra. Esta é a justificativa do item (e) estar correto.

Questão 2 (5 pontos) Uma onda se propaga em uma corda esticada na direção do eixo x . As figuras abaixo mostram o deslocamento transversal da corda em função do tempo e da posição.



Com que velocidade esta onda se propaga na corda?

Resolução:

2. A partir dos gráficos podemos obter a amplitude A , o período T e o comprimento de onda λ . No caso da versão A da prova, temos $A = 5$ cm, $T = 2$ s e $\lambda = 6$ m. Com λ e T obtemos diretamente a velocidade de propagação da onda, $v = \lambda/T$ (no caso da versão A, $v = 3$ m/s).

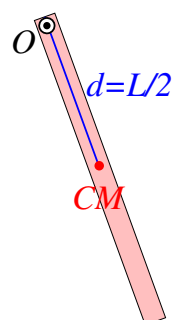
Prova	T (s)	λ (m)	v (m/s)
A	2	6	3
B	1	4	4
C	4	8	2
D	3	6	2

Questão 3 (10 pontos) Uma barra homogênea de massa 2 kg e comprimento 3 m é pendurada por um de seus extremos, oscilando com deslocamentos angulares $\theta \ll 1$ rad. O momento de inércia da barra em relação à sua extremidade é $mL^2/3$. Despreze quaisquer forças dissipativas e utilize $g = 10$ m/s². Qual é a frequência angular de oscilação desta barra?

Resolução:

3. Pela segunda lei de Newton para rotações, temos que o torque resultante, em relação ao eixo de rotação (eixo O da figura ao lado), é igual ao momento de inércia, em relação ao mesmo eixo, vezes a aceleração angular. O torque resultante, em relação ao ponto O , é o torque da força peso que atua no centro de massa da barra: $\tau_g = -mg(L/2)\sin\theta \approx -mgL\theta/2$, sendo o sinal do torque sempre oposto ao deslocamento angular. Portanto, para $\theta \ll 1$, temos

$$\tau_g = I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL\theta}{2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{2I_O}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$



Desta forma, identificamos a frequência angular de oscilação da barra como sendo (vide formulário)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{2I_O}} = \sqrt{\frac{\textcolor{red}{m}gL}{2\textcolor{red}{m}L^2/3}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{2L}}}$$

Prova	m (kg)	L (m)	ω_0 (rad/s)
A	2	3	$\sqrt{5}$
B	3	3/2	$\sqrt{10}$
C	1	5	$\sqrt{3}$
D	5	1	$\sqrt{15}$

Questão 4 (5 pontos) Duas ondas sonoras unidimensionais se sobrepõem resultando em

$$u(x, t) = 2A \cos(2\pi x - 680\pi t) \cos\left(\frac{3\pi}{340}x - 3\pi t\right)$$

(unidades no S.I.). Qual é a frequência de batimentos correspondente?

Resolução:

4. A fórmula da sobreposição de duas ondas harmônicas que geram batimentos é dada por (vide formulário)

$$u(x, t) = 2A \cos(\bar{\kappa}x - \bar{\omega}t) \cos\left(\frac{\Delta\kappa}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right),$$

sendo $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ e $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ a média e a diferença entre as frequências angulares originais ω_1 e $\omega_2 > \omega_1$, respectivamente. Temos ainda que $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\textcolor{red}{2}\pi\Delta f}{\textcolor{red}{2}} = \pi f_{\text{bat}}$, portanto, a frequência de batimento é imediatamente identificada olhando para o cosseno cuja frequência angular seja a menor, e dividir esta última por π .

Prova	$u(x, t)$ (S.I.)	f (Hz)
A	$u(x, t) = 2A \cos(2\pi x - 680\pi t) \cos\left(\frac{3\pi}{340}x - 3\pi t\right)$	3
B	$u(x, t) = 2A \cos(\pi x - 340\pi t) \cos\left(\frac{\pi}{170}x - 2\pi t\right)$	2
C	$u(x, t) = 2A \cos(\pi x - 340\pi t) \cos\left(\frac{\pi}{85}x - 4\pi t\right)$	4
D	$u(x, t) = 2A \cos(2\pi x - 680\pi t) \cos\left(\frac{\pi}{340}x - \pi t\right)$	1

Questão 5 (5 pontos) Sobre o modelo microscópico de esferas e molas para o sólido visto em aula, assinale a afirmação **errada**.

- (a) Na visão microscópica, a velocidade do som em sólidos depende apenas do “ k ” da mola e da distância entre dois átomos.

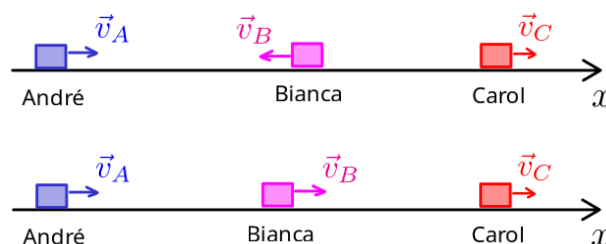
- (b) A dureza do sólido é quantificada pelo módulo de Young.
- (c) A inércia do sólido é quantificada pela densidade volumétrica de massa.
- (d) Obtemos o “ k ” da mola interatômica conhecendo o módulo de Young e a distância média entre os átomos do sólido.
- (e) A velocidade da onda em sólidos é uma competição entre a dureza e a inércia do meio material.

Resolução:

5. A constante elástica interatômica (o “ k ” da mola) e a distância entre dois átomos do modelo microscópico permite definir o módulo de Young, $Y = k_m/d$, mas não a velocidade do som em sólidos, o que faz o item (a) ser a afirmação errada.

Quanto às demais alternativas, são justificadas majoritariamente pela expressão da velocidade do som em sólidos (vide formulário): $v = \sqrt{Y/\rho} = d\sqrt{k_m/m_{at}}$. Nesta fórmula, o módulo de Young Y caracteriza a dureza do meio material no qual o som se propaga, sendo maior a velocidade do som quanto mais duro for o sólido, e a densidade ρ caracteriza a inércia do meio à propagação da onda, sendo menor a velocidade quanto maior for a densidade do sólido.

Questão 6 (10 pontos)



André, Bianca e Carol andam de skate ao longo do eixo x , com sentidos indicados na figura acima e com velocidades escalares v_A , v_B e v_C , respectivamente. André e Carol possuem caixas de som emitindo frequências f_A e f_C , respectivamente, enquanto Bianca carrega um microfone. Seja v_S a velocidade do som. Que frequências $\tilde{f}_A$ e $\tilde{f}_C$ são registradas pelo microfone de Bianca?

Resolução:

6. A fórmula do efeito Doppler é dada por (vide formulário)

$$f = f_0 \frac{v_S \pm v_{\text{obs}}}{v_S \pm v_{\text{fonte}}} \begin{cases} + (\text{observador se aproximando da fonte}) \\ - (\text{observador se afastando da fonte}) \\ + (\text{fonte se afastando do observador}) \\ - (\text{fonte se aproximando do observador}) \end{cases}$$

sendo os dois primeiros casos referentes ao sinal do numerador, e os dois últimos casos referentes ao sinal do denominador. Bianca faz o papel de observador enquanto que André e Carol fazem o papel de fonte.

Portanto temos, na primeira figura acima (provas das versões A e B),

$$\boxed{\bar{f}_A = f_A \frac{v_S + v_B}{v_S - v_A}}, \quad \boxed{\bar{f}_C = f_C \frac{v_S - v_B}{v_S + v_C}},$$

enquanto que na segunda figura acima (prova das versões C e D) temos

$$\boxed{\bar{f}_A = f_A \frac{v_S - v_B}{v_S - v_A}}, \quad \boxed{\bar{f}_C = f_C \frac{v_S + v_B}{v_S + v_C}}.$$

Questão 7 (30 pontos) Considere um bloco de massa $m = 3 \text{ kg}$ ligado por uma mola de massa desprezível e constante elástica $k = 108 \text{ N/m}$ dentro de um recipiente contendo um líquido viscoso. O coeficiente de amortecimento do líquido é tal que, na ausência de forças externas, o regime de amortecimento é crítico, cuja solução é

$$x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[A_0 + B_0 t \right].$$

O sistema é então submetido a uma força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$, sendo $F_0 = 30 \text{ N}$ e ω_e é ajustada para a frequência de ressonância. Constata-se que, no início do movimento, com a força externa atuando, o bloco estava em repouso na posição de equilíbrio.

- (6 pontos) Escreva a equação diferencial que este sistema satisfaz, especificando os valores numéricos de seus parâmetros.
- (6 pontos) Qual é a fase de oscilação depois de um tempo longo o suficiente, tal que o movimento se encontra no regime estacionário?
- (6 pontos) Qual é a amplitude de oscilação do regime estacionário?
- (6 pontos) Qual é o valor da constante A_0 que satisfaz as condições iniciais do problema?
- (6 pontos) Qual é o valor da constante B_0 que satisfaz as condições iniciais do problema?

Resolução:

- (a) O enunciado fornece $m = 3 \text{ kg}$, $k = 108 \text{ N/m}$, $F_0 = 30 \text{ N}$ e que o regime de amortecimento é crítico, portanto, $\gamma = 2\omega_0$. Com estes números determinamos

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{108}{3}} = \sqrt{36} = 6 \text{ rad/s}, \quad \gamma = 2\omega_0 = 12 \text{ s}^{-1}, \quad \frac{F_0}{m} = \frac{30}{3} = 10 \text{ m/s}^2.$$

A frequência externa ω_e é ajustada à frequência de ressonância, portanto, $\omega_e = \omega_0 = 6 \text{ rad/s}$.

Pela segunda lei de Newton obtemos a equação diferencial do sistema,

$$F_{\text{res}} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_e t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t),$$

sendo $\gamma = b/m$ e $\omega_0^2 = k/m$. Substituindo os valores numéricos,

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 12 \frac{dx}{dt} + 36x = 10 \cos(6t)} \quad (\text{em unidades do S.I.})$$

- (b) No regime estacionário, o transiente vai a zero e na solução geral só permanece a solução particular, $x(t) \rightarrow A(\omega_e) \cos[\omega_e t + \phi(\omega_e)]$. Do formulário temos

$$\operatorname{tg}[\phi(\omega_e)] = -\frac{\gamma\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \Rightarrow \operatorname{tg}[\phi(\omega_0)] = \pm\infty.$$

O sinal depende se aproximamos ω_e por valores abaixo (−) ou acima (+) de ω_0 . Independentemente disso, o ângulo $\phi(\omega_e)$, que por definição assume valores negativos partindo de zero na medida que ω_e aumenta partindo de zero, é uma função contínua de ω_e , passando por $-\pi/2$ quando $\operatorname{tg}[\phi(\omega_e)]$ passa de $-\infty$ para $+\infty$. Portanto, $\boxed{\phi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}}$.

- (c) Pelo formulário,

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \gamma^2\omega_e^2}} \Rightarrow A(\omega_0) = \frac{F_0/m}{\gamma\omega_0} = \frac{10}{12 \times 6} \Rightarrow \boxed{A(\omega_0) = \frac{5}{36} \text{ m}}.$$

- (d) e (e): A_0 e B_0 são determinados pelas condições iniciais do problema, $x(t = 0 \text{ s}) = 0 \text{ m}$ e $\dot{x}(t = 0 \text{ s}) = 0 \text{ m/s}$. As expressões da posição e da velocidade em função do tempo são dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A_0 + B_0 t] + A(\omega_e) \cos[\omega_e t + \phi(\omega_e)], \\ \dot{x}(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[-\frac{\gamma}{2}(A_0 + B_0 t) + B_0 \right] - \omega_e A(\omega_e) \sin[\omega_e t + \phi(\omega_e)]. \end{aligned}$$

Impondo as condições iniciais,

$$x(0) = A_0 + A(\omega_0) \cos[\phi(\omega_e)] = A_0 + \frac{5}{36} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{A_0 = 0 \text{ m}}.$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\gamma}{2}A_0 + B_0 - \omega_e A(\omega_e) \sin[\phi(\omega_e)] = B_0 - 6 \times \frac{5}{26} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{B_0 = -\frac{5}{6} \text{ m/s}}.$$

Questão 8 (30 pontos) Uma onda harmônica progressiva propaga-se em uma corda de densidade linear $0,5 \text{ kg/m}$. O deslocamento transversal da corda é descrito pela expressão

$$u(x, t) = 0,01 \cos\left(\frac{\pi}{2}x + 10\pi t\right) \quad (\text{unidades no S.I.}).$$

- (a) (6 pontos) Qual é a velocidade e o sentido de propagação desta onda?
- (b) (6 pontos) Qual é a tensão na corda?
- (c) (6 pontos) Considere que há uma extremidade fixa na corda em $x = -5 \text{ m}$. A onda original vai refletir nesta extremidade, e a interferência da onda refletida com a onda original formará uma onda estacionária. Determine a condição imposta na fase espacial da onda estacionária devida a esta extremidade.
- (d) (6 pontos) Obtenha a expressão do deslocamento transversal da onda estacionária sabendo que, no instante inicial, os trechos da corda próximos de $x = -5 \text{ m}$ estão com seu deslocamento transversal positivos e máximos.

- (e) (6 pontos) Determine a posição do segundo nó da onda estacionária além de $x = -5$ m. Assuma que estas duas posições determinam as extremidades de outra corda que vibra em seu terceiro harmônico. Faça um desenho ilustrando este modo de vibração, indicando as posições destas extremidades no eixo x .

Resolução:

- (a) A partir da expressão identificamos $\kappa = \frac{\pi}{2}$ rad/m e $\omega = 10\pi$ rad/s. A velocidade de propagação da onda na corda é, portanto,

$$v = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{10\pi}{\pi/2} \Rightarrow \boxed{v = 20 \text{ m/s}}.$$

O argumento da função cosseno é do tipo $x + vt$, portanto, a onda se propaga para a esquerda.

- (b) O enunciado fornece $\mu = 0,5$ kg/m. Pela relação entre velocidade da onda, tensão na corda, e densidade linear, temos

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow F_T = \mu v^2 = 0,5 \times 400 \Rightarrow \boxed{F_T = 200 \text{ N}}.$$

- (c) A forma da onda estacionária correspondente é dada por

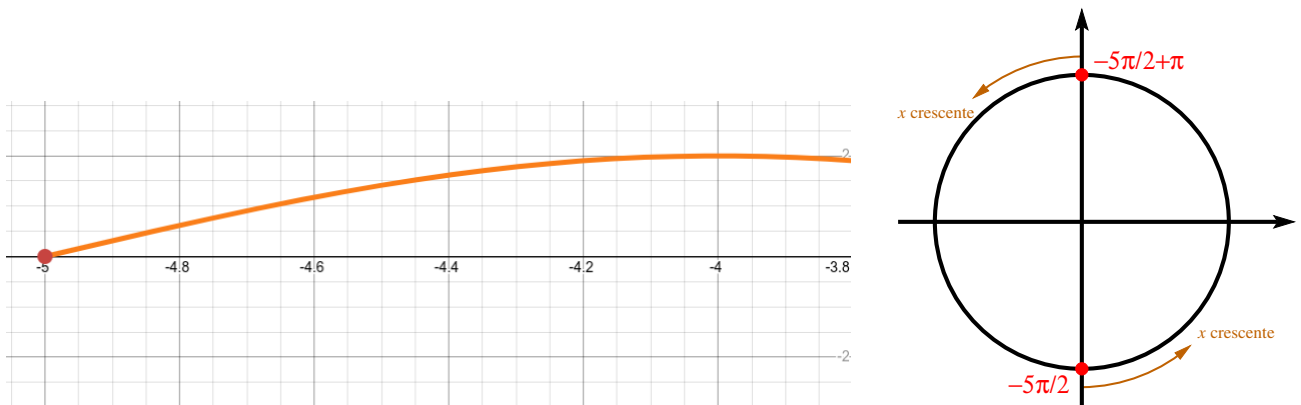
$$u(x, t) = 2A \cos(\kappa x + \alpha) \cos(\omega t + \beta) = 0,02 \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \alpha\right) \cos(10\pi t + \beta), \quad (S.I.)$$

tal que as fases α e β devem satisfazer as condições de contorno. Sendo $x = -5$ m uma extremidade fixa, a condição na fase espacial α é tal que

$$u(x = -5 \text{ m}, t) = 0 \text{ m} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \times (-5) + \alpha\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi \text{ rad}}$$

dado que $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$.

- (d) Em $t = 0$ s temos $u(x, t = 0 \text{ s}) = 0,02 \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \alpha\right) \cos \beta$, e que próximo de $x = -5$ m a corda tem que ter deslocamento transversal positivo e máximo (vide figura abaixo à esquerda).

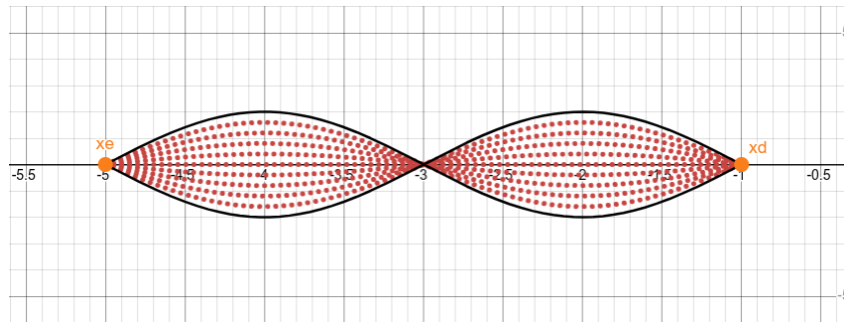


Pelo círculo trigonométrico (figura acima, à direita), vemos que a fase espacial que satisfaz deslocamentos positivos conforme o x aumenta a partir de $x = -5$ m é $\alpha = 0 \text{ rad}$.

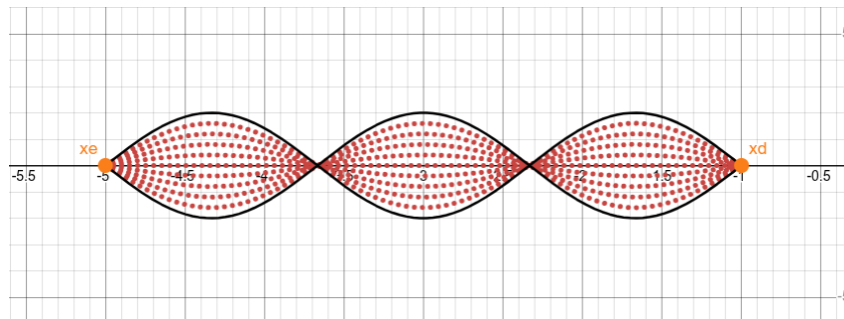
As condições acima também impõem que $\cos \beta = 1$, ou seja, $\boxed{\beta = 0 \text{ rad}}$. Com isso, a expressão do deslocamento transversal da onda estacionária é dada por

$$u(x, t) = 0,02 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos(10\pi t). \quad (\text{unidades do S.I.})$$

- (e) Dois nós consecutivos quaisquer da onda estacionária estão espaçados por meio comprimento de onda. Como $\kappa = \pi/2 \text{ rad/m} = 2\pi/4 \text{ rad/m}$, temos $\lambda = 4 \text{ m}$ e $\lambda/2 = 2 \text{ m}$. O nó em $x = -5 \text{ m}$ caracteriza a extremidade à esquerda, já que a onda propagante original caminhava da direita para a esquerda. Portanto, os próximos dois nós estão situados em $x = -5 \text{ m} + \lambda/2 = -3 \text{ m}$ e $x = -5 \text{ m} + \lambda = -1 \text{ m}$ (vide figura abaixo).



Fixando os extremos em $x = -5 \text{ m}$ e $x = -1 \text{ m}$, e fazendo a corda vibrar em seu terceiro harmônico, temos a figura abaixo:



FORMULÁRIO

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A_0 + B_0 t), \quad x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A_0 e^{-\beta t} + B_0 e^{\beta t}], \quad x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$x_p(t) = A(\omega_e) \cos(\omega_e t + \phi(\omega_e)),$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}},$$

$$\gamma = \frac{b}{m}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}, \quad Q = \frac{\omega_0}{\gamma},$$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_e^2}}, \quad \text{tg}[\phi(\omega_e)] = -\frac{\gamma \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt),$$

$$u(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t + \phi), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k},$$

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}, \quad v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad v = \sqrt{\frac{d^2 k_m}{m_{\text{at}}}},$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx \pm \omega t + \phi), \quad K = U = \int_0^\lambda \frac{\partial U}{\partial x} dx = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda,$$

$$\mathcal{P} = \frac{K + U}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v,$$

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen } a \cos b \pm \text{sen } b \cos a, \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \text{sen } a \text{sen } b,$$

$$u(x, t) = 2A \cos(kx + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_t),$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n}.$$

$$u(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t) = 2A \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right),$$

$$f = f_0 \frac{(1 \pm v_{\text{obs}}/v_{\text{som}})}{(1 \pm v_{\text{fonte}}/v_{\text{som}})}, \quad \text{sen} \alpha = \frac{v_{\text{som}}}{v_{\text{fonte}}} = \frac{1}{n_{\text{Mach}}}.$$