

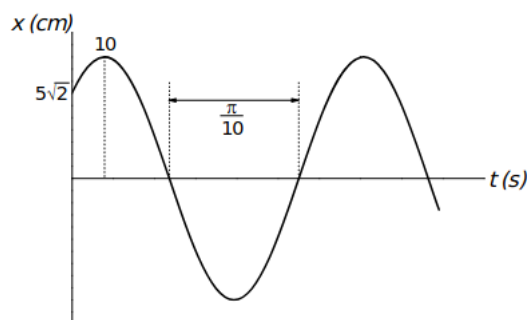


1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Observe os diferentes graus de dificuldade para as questões: (*), (**), (***)

Sistemas massa-mola

1. (*) A figura mostra a oscilação de um corpo com massa 0,5 kg preso a uma mola de constante elástica k .



- (a) Quanto vale a constante elástica k da mola?

R: $k = 50 \text{ kg/s}^2$

- (b) Escreva a equação que descreve $x(t)$ em cm.

R: $x(t) = 10 \cos(10t - \pi/4) \text{ cm}$

- (c) Obtenha expressões para as energias potencial E_p , cinética E_c e mecânica total E_T do oscilador em função do tempo.

R: $E_p(t) = \frac{1}{4} \cos^2(10t - \pi/4) \text{ J}$, $E_c(t) = \frac{1}{4} \sin^2(10t - \pi/4) \text{ J}$, $E_T(t) = \frac{1}{4} \text{ J}$

2. (*) A posição em função do tempo da oscilação de um corpo segue a equação $x(t) = 3 \cos(2\pi t + \pi/3)$, em que x está em metros, t em segundos e a fase está em radianos. Determine:

(a) A amplitude do movimento.

R: $A = 3 \text{ m}$

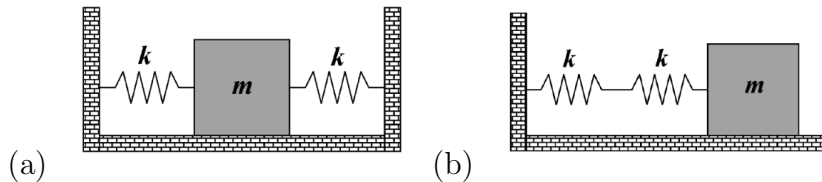
(b) A frequência e o período do movimento.

R: $f = 1 \text{ Hz}$, $T = 1 \text{ s}$

(c) A frequência angular e a fase inicial.

R: $\omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$, $\phi_i = \pi/3$

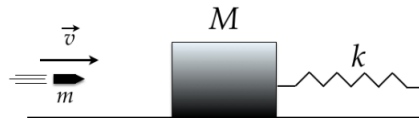
3. (*) Na figura abaixo mostramos duas molas idênticas de constante elástica k ligadas a um mesmo bloco de massa m , sendo que as outras extremidades das molas estão fixas em suportes rígidos. Mostre que a frequência de oscilação do bloco sobre a superfície horizontal em cada figura segue respectivamente:



(a) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$

(b) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}}$

4. (**) Um bloco de massa M , em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, é fixado a um suporte rígido através de uma mola, cuja constante elástica é k e inicialmente relaxada. Um projétil de massa m e velocidade v atinge o bloco e nele se fixa.



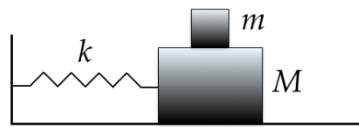
(a) Obtenha a velocidade inicial do conjunto bloco + projétil.

R: $v_i = \frac{mv}{m+M}$

- (b) Escreva a função $x(t)$ que descreve o movimento posterior do sistema, considerando que a colisão ocorra em $t=0$ s e que $x(0)=0$ m. Deixe seu resultado em função de M , v e k .

R: $x(t) = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m+M}}t\right)$ considerando a orientação do eixo para a direita.

5. (**) Dois blocos ($m = 1,22$ kg e $M = 8,73$ kg) e uma determinada mola ($k = 344$ N/m) estão arranjados em uma superfície horizontal, sem atrito, conforme mostrado na figura. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é de 0,42.



- (a) Determine a amplitude A máxima possível para que não haja deslizamento entre os blocos.

R: $A = 0,119$ m

- (b) Encontre a expressão para $\ddot{x}(t)$ considerando uma amplitude A e $x(0) = A$. Obtenha o valor máximo desta aceleração.

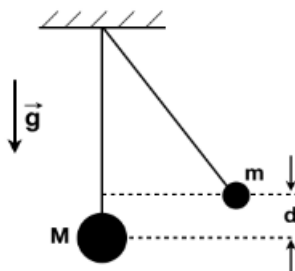
R: $\ddot{x}(t) = -34,57A \cos(5,88t)$; $a_{max}=4,12$ m/s²

Pêndulos

6. (*) Depois de pousar em um planeta desconhecido, uma exploradora do espaço constrói um pêndulo simples de 50 cm de comprimento. Ela verifica que o pêndulo simples executa 100 oscilações completas em 136 s. Qual o valor de g nesse planeta?

R: $g = 10,67$ m/s²

7. (*) Duas massas, m e M , suspensas por fios de massas desprezíveis, de mesmo comprimento L , são localizadas como mostrado na figura. A massa m é solta e colide inelasticamente grudando em M .



- (a) Calcule a velocidade de m imediatamente antes da colisão.

R: $v_i = \sqrt{2gd}$

- (b) Calcule a velocidade do conjunto formado por $m + M$ imediatamente após da colisão.

R: $v_f = \frac{m}{m+M} \sqrt{2gd}$

- (c) Calcule a altura h máxima atingida pelo pêndulo formado por $m + M$. É definido $h = 0$ no ponto mais baixo do pêndulo.

R: $h = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 d$

- (d) Calcule a frequência natural e a amplitude para pequenas oscilações do sistema.

R: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} ; \theta_{max} = \arccos\left[1 - \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{d}{L}\right]$

8. (*) Um pêndulo simples possui uma corda de $L = 1$ m com uma massa de 5 kg em sua ponta. O sistema inicialmente se encontra em equilíbrio até que a massa é empurrada conferindo uma velocidade linear inicial de $v_0 = -2$ m/s. Considere que a massa entre em um regime de pequenas oscilações. Defina $h = 0$ m no ponto mais baixo do pêndulo.

- (a) Qual é a altura h máxima que a massa chega? Qual é a amplitude angular correspondente a essa altura?

R: $h = 0,2$ m, $\theta_{max} = \arccos(0,8)$

- (b) Qual é o período da oscilação?

R: $T = 2$ s

(c) Obtenha a posição angular do pêndulo em função do tempo.

R: $\theta(t) = \theta_{max} \cos(\pi t + \pi/2)$

9. (**) Uma haste de comprimento L e densidade linear ρ é suspensa a partir de uma de suas extremidades de forma que possa oscilar como um pêndulo físico.

(a) Calcule o momento de inércia da haste em relação à extremidade.

R: $I = \frac{1}{3}\rho L^3$

(b) Deduza uma expressão para o período de oscilação.

R: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

(c) Considere agora que a densidade da haste possa ser não uniforme e que d é a distância entre a extremidade e o novo centro de massa. Deduza a expressão para o período de oscilação em função de L e d considerando que o momento de inércia do novo centro de massa é dado por $I_{CM} = \frac{\rho L^3}{12}$.

R: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 + 12d^2}{12gd}}$

(d) Encontre a distância $d = d_0$ que minimize o período de oscilação.

R: $d_0 = \sqrt{\frac{1}{12}}L$

10. (*) Uma esfera sólida de 95 kg com um raio de 12 cm é suspensa por um fio vertical preso ao teto de uma sala. Um torque de magnitude 0,02 Nm é necessário para girar a esfera de um ângulo de 0,85 rad.

(a) Obtenha a constante de torção do fio.

R: $K = 23,5 \times 10^{-3} \text{ N.m}$

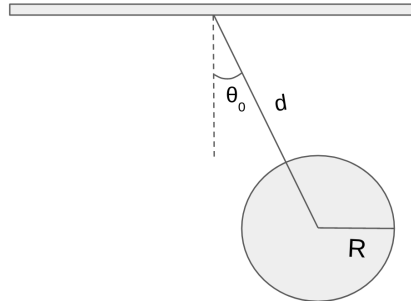
(b) Qual o período da oscilação, quando a esfera é liberada dessa posição?

R: $T = 30,3 \text{ s}$

(c) Qual a velocidade angular máxima que a esfera pode atingir partindo dessa posição? E qual a velocidade linear máxima que um ponto da esfera pode chegar na mesma situação?

R: $\Omega_{max} = 0,18 \text{ rad/s}$, $v_{max} = 0,021 \text{ m/s}$

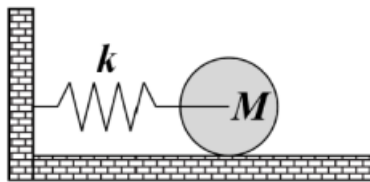
11. (*) Um pêndulo físico consiste em um disco sólido uniforme (de massa M e raio R), suportado num plano vertical por um eixo localizado a uma distância d do centro do disco. O disco é deslocado de um pequeno ângulo θ_0 e liberado. Ache uma expressão para período do movimento harmônico simples resultante.



R: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+2d^2}{2gd}}$

Energia no MHS

12. (***) Uma mola horizontal sem massa está ligada ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa de um cilindro sólido, de massa M , de forma que ele possa rolar, sem deslizamento, sobre uma superfície horizontal (figura). A constante da mola é $k = 3 \text{ N/m}$. Se o sistema for liberado de uma posição de repouso em que a mola esteja esticada de $0,25 \text{ m}$, encontre:



- (a) A energia cinética translacional e a energia cinética rotacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio.

R: $K_{trans} = 6,25 \times 10^{-2} \text{ J}$, $K_{rot} = 3,125 \times 10^{-2} \text{ J}$

- (b) Mostre que nessas condições o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples com período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

PS: Neste problema, preste atenção no sinal da força de atrito e de seu respectivo torque, em relação ao eixo de rotação do cilindro. Também se atente à relação entre a aceleração linear e a aceleração angular: elas possuem o mesmo sinal?

13. (**) Uma partícula de 3 kg está em movimento harmônico simples em uma dimensão e move-se de acordo com a seguinte equação:

$$x(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{unidades no SI.})$$

- (a) Em qual valor de x (positivo) a energia potencial da partícula é igual à metade da energia total?

R: $x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ m}$

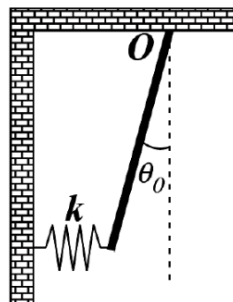
- (b) Quanto tempo leva para que a partícula mova-se para esta posição x , a partir do ponto de equilíbrio?

R: $t = 0,75 \text{ s}$

Pequenas oscilações

14. (***) Uma haste rígida de comprimento L e massa M está suspensa, podendo girar em torno do ponto fixo O , por uma das suas extremidades, como mostra a figura abaixo. Na outra extremidade a barra está ligada a uma mola de constante k que está na posição relaxada quando a barra se encontra na posição vertical. No instante $t = 0$, a barra é deslocada para a esquerda, até um ângulo θ_0 com a direção vertical, e abandonada a partir do repouso. Dado que $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ e considerando que a mola sempre permanece na horizontal:

Dica: para pequenas oscilações, $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(\theta) \approx 1$.



(a) Obtenha a equação diferencial que descreve o movimento da barra.

R: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{3}{2} \frac{g}{L} + \frac{3k}{M} \cos \theta \right] \sin \theta = 0$

(b) Determine a frequência angular ω_0 de oscilação da barra, considerando oscilações de pequenas amplitudes.

R: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{L} + \frac{3k}{M}}$

(c) Obtenha a função $\theta(t)$ que descreve o movimento de oscilação da barra.

R: $\theta(t) = -\theta_0 \cos(\omega_0 t)$

15. (**) Uma partícula de massa m executa um movimento unidimensional e possui uma energia potencial cuja dependência com a coordenada x é de $U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$, onde a e b são constantes positivas.

(a) Determine a posição de equilíbrio para um corpo sob a ação dessa força.

R: $x_{eq} = \frac{2a}{b}$

(b) Sendo $x' = x - x_{eq}$, mostre que a equação diferencial do movimento para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio é:

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \left(\frac{b^4}{8a^3 m} \right) x' = 0$$

(c) Calcule o período natural das oscilações.

R: $T = 2\pi \sqrt{\frac{8a^3 m}{b^4}}$

Oscilador amortecido

16. (*) Um pêndulo com fio de comprimento 1 m é abandonado do repouso de um ângulo inicial de 15° . Após 1000 s, sua amplitude é reduzida para $5,5^\circ$. Qual é o valor da constante de amortecimento γ ?

R: $\gamma = 0,002 \text{ s}^{-1}$

17. (**) Em um sistema oscilatório com uma força de atrito viscoso temos:

$$F_{mola} + F_{atrito} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

onde k é a constante da mola e b é a constante de amortecimento. Logo, a equação de movimento fica:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Considere o oscilador como estando nos seguintes regimes e resolva a equação diferencial para as condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$.

(a) Regime subcrítico

$$\mathbf{R:} \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega} \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right) \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

(b) Regime crítico

$$\mathbf{R:} \quad x(t) = v_0 \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)t$$

(c) Regime supercrítico

$$\mathbf{R:} \quad x(t) = \frac{v_0}{2\beta} \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right) (e^{\beta t} - e^{-\beta t}), \quad \beta = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

18. (*) Um corpo de massa $m = 40$ g está preso a uma mola de constante elástica $k = 100$ N/m. Este sistema é colocado para oscilar e depois imerso num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $b = 0,08$ kg/s.

(a) Determine a frequência natural do sistema.

$$\mathbf{R:} \quad \omega_0 = 50 \text{ rad/s}$$

(b) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes (indicando suas unidades).

$$\mathbf{R:} \quad \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\gamma = 2 \text{ s}^{-1} \quad e \quad \omega_0^2 = 2500 \text{ rad}^2/\text{s}^2)$$

(c) Qual é o regime de oscilação? (justifique)

$\mathbf{R:}$ regime de oscilação sub-crítico

(d) Qual é a frequência de oscilação?

$$\mathbf{R:} \quad \omega = \sqrt{2499} \text{ rad/s}$$

19. (**) Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0 . Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 3,68 m, após 1 segundo.

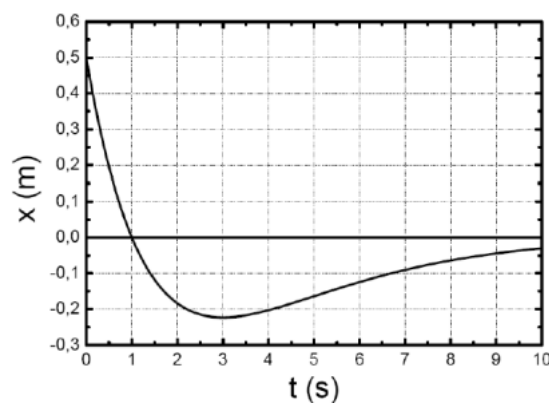
(a) Qual é o valor de v_0 ?

R: $v_0 = 10 \text{ m/s}$

(b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2 \text{ m}$ com a mesma velocidade inicial v_0 , qual seria o valor de x num instante t qualquer?

R: $x(t) = e^{-t}(2 + 12t) \text{ m}$

20. (**) O gráfico de $x(t)$, mostrado na figura, representa a equação horária de um oscilador criticamente amortecido, para um sistema composto de um corpo de massa $m = 1 \text{ kg}$ preso a uma mola de constante elástica k e imerso em um líquido viscoso, de coeficiente de resistência viscosa b .



(a) A equação horária $x(t)$ pode ser escrita como:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A + Bt)$$

Determine os valores de A e B da equação.

R: $A = 0,5 \text{ m}$, $B = -0,5 \text{ m/s}$

(b) Em que instante de tempo a velocidade do corpo será nula, no intervalo de tempo mostrado no gráfico?

R: $t = 3 \text{ s}$

(c) Determine o coeficiente de resistência viscosa b e a constante elástica k da mola.

R: $b = 1 \text{ kg/s}$, $k = 0,25 \text{ N/m}$

(d) Determine o valor da velocidade inicial do oscilador.

R: $v_0 = -0,75 \text{ m/s}$

21. (*) Um corpo de massa $m = 1000 \text{ kg}$ cai de uma altura $H = 1 \text{ m}$ sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se projetar um sistema constituído por uma mola e um amortecedor sobre o qual se montará a plataforma de modo que ela fique em equilíbrio a uma distância $d = 2 \text{ m}$ abaixo de sua posição inicial, após o impacto. O equilíbrio deve ser atingido tão rápido quanto possível, sem oscilações.

(a) Obtenha a constante k da mola e a constante de amortecimento b do amortecedor.

R: $k = 5 \times 10^3 \text{ N/m}$, $b = 2\sqrt{5} \times 10^3 \text{ kg/s}$

(b) Obtenha a função horária que descreve o movimento do bloco após entrar em contato com a plataforma.

R: $x(t) = 2 \left(e^{-\sqrt{5}t} - 1 \right) \text{ m}$

Oscilador harmônico forçado

22. (*) Um oscilador não-amortecido de massa m e frequência natural ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0 \sin(\omega_{\text{ext}}t)$, partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x(t)$.

R: $x(t) = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2|} \left[\sin(\omega_{\text{ext}}t) - \frac{\omega_{\text{ext}}}{\omega_0} \sin(\omega_0t) \right]$

23. (*) Um corpo de massa m desliza sobre um plano horizontal sem atrito sujeito a três forças: uma força elástica resultante da ação de uma mola de constante elástica k , uma força devido à resistência viscosa do meio, caracterizada pela constante de resistência viscosa b , e uma força externa periódica $F(t) = F_0 \cos(\omega_{\text{ext}}t)$, sendo ω_{ext} a frequência externa.

(a) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento do corpo e encontre a sua solução estacionária.

R: $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_{\text{ext}}t),$

$x(t) = A(\omega_{\text{ext}}) \cos[\omega_{\text{ext}}t + \phi(\omega_{\text{ext}})]$ com

$A(\omega_{\text{ext}}) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2)^2 + \gamma^2\omega_{\text{ext}}^2}}, \quad \phi = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega_{\text{ext}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2}\right)$

(b) Considerando que $m = 50 \text{ kg}$, $k = 5000 \text{ N/m}$, $F_0 = 50 \text{ N}$ e $b = 500 \text{ kg/s}$, calcule a frequência natural do sistema e o seu fator de qualidade Q .

R: $\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$, $Q = 1$

- (c) No regime estacionário, usando os valores do item anterior, determine o valor de ω_{ext} para o qual a amplitude A do movimento é máxima.

R: $\omega_{\text{ext}} = 5\sqrt{2} \text{ s}^{-1}$

- (d) No regime estacionário, usando os valores do item (b), determine o valor da amplitude máxima.

R: $A_{\text{max}} = \frac{1}{50\sqrt{3}} \text{ m}$

24. (*) Um corpo de massa 50 g está preso a uma mola de constante $k = 20 \text{ N/m}$ e oscila, inicialmente, livremente. Esse oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $b = 0,9 \text{ kg/s}$. Depois disso o oscilador, ainda no meio viscoso, é excitado por uma força externa $F = F_0 \cos(\omega_{\text{ext}}t)$, sendo $F_0 = 9 \text{ N}$ e $\omega_{\text{ext}} = 20 \text{ rad/s}$.

- (a) Determine a frequência natural ω_0 do sistema.

R: $\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$

- (b) Qual o regime de oscilação do sistema quando imerso no meio viscoso, mas antes de ser excitado pela força externa? Justifique a resposta.

R: Regime subcrítico

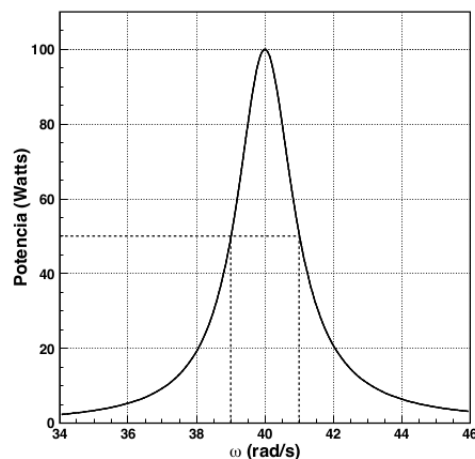
- (c) Depois que a força externa é aplicada e que o sistema entrou no regime estacionário, qual o valor da amplitude do movimento?

R: $A = 0,5 \text{ m}$

- (d) Qual deveria ser o valor exato da frequência externa de excitação para que a amplitude de oscilação, no regime estacionário, fosse máxima?

R: $\omega_{\text{ext}} = \sqrt{238} \text{ s}^{-1}$

25. (**) O gráfico mostra a curva de ressonância de potência de um certo sistema mecânico quando sujeito a uma força externa $F_0 \sin(\omega_{\text{ext}}t)$, onde F_0 é constante e ω_{ext} é variável (obs: no gráfico, ω_{ext} está como ω).



- (a) Encontre o valor numérico de ω_0 e Q para esse sistema.

R: $\omega_0 = 40 \text{ rad/s}$, $Q = 20$

- (b) A força externa deixa de agir. Depois de quantos ciclos de oscilações amortecidas a energia do sistema é reduzida por um fator $1/e^5$ do seu valor inicial? **Dica:** Uma boa aproximação para o período nesse caso é $2\pi/\omega_0$. Use $e=2,718$.

R: 16 ciclos

26. (*) Observa-se que as oscilações na ausência de força externa periódica de um sistema mecânico tem frequência angular ω_1 . O mesmo sistema, na presença de uma força externa $F_0 \cos(\omega_{\text{ext}} t)$ (onde $F_0 = \text{constante}$ e ω_{ext} variável) tem uma curva de ressonância de potência cuja largura à meia altura é $\Delta\omega_{\text{ext}} = \omega_1/5$.

- (a) Em que frequência ocorre o máximo de potência?

R: $\omega_{\text{ext}} = 1,005 \omega_1$

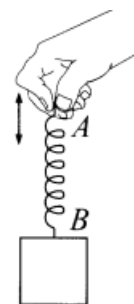
- (b) Determine o Q do sistema.

R: $Q \approx 5$

- (c) Se o sistema consistir de uma massa m acoplada a uma mola de constante elástica k , determine o valor do coeficiente de atrito viscoso b do termo resistivo $-bv$, em termos de m e k .

R: $b \approx 0,2\sqrt{mk}$

27. (***) Uma pessoa está segurando uma extremidade A de uma mola de massa desprezível e constante elástica 80 N/m . Na outra extremidade B , há uma massa de $0,5 \text{ kg}$ suspensa, inicialmente em equilíbrio. No instante $t = 0$, a pessoa começa a sacudir a extremidade A (ver figura), fazendo-a oscilar harmonicamente com amplitude de 5 cm e período de 1 s .



- (a) Calcule o deslocamento z da massa em relação à posição de equilíbrio, para $t > 0$.

R: $z(t) = A'[\sin(\omega_{\text{ext}} t) - (\omega_{\text{ext}}/\omega_0) \sin(\omega_0 t)]$, com $\omega_{\text{ext}} = 2\pi \text{ rad/s}$, $\omega_0 = 4\sqrt{10} \text{ rad/s}$ e $A' = \frac{\omega_0^2 A}{(\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2)} = 0,066 \text{ m}$, com z apontando para cima.

- (b) Calcule a força total $\vec{F}(t)$ exercida sobre a extremidade A para $t > 0$.

R: $\vec{F}(t) = mg\hat{z} - k[z - A \sin(\omega_{\text{ext}} t)]\hat{z}$, com $A = 0,05 \text{ m}$

28. (*) Para um oscilador de massa m , frequência livre ω_0 e constante de amortecimento γ , sujeito à força externa $F = F_0 \cos(\omega_{\text{ext}} t)$, calcule:

(a) O valor exato de ω_{ext} para o qual a amplitude de oscilação estacionária A é máxima, e o valor máximo de A .

$$\mathbf{R:} \omega_{\text{max}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} ; A_{\text{max}} = \frac{F_0}{m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

(b) O valor exato de ω_{ext} para o qual a velocidade tem amplitude $\omega_{\text{ext}} A$ máxima, e o valor do máximo.

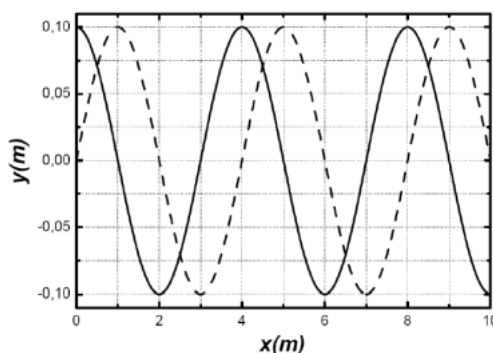
$$\mathbf{R:} \omega_{\text{max}} = \omega_0 ; (A\omega_{\text{ext}})_{\text{max}} = \frac{F_0}{\gamma m}$$

Ondas harmônicas progressivas

29. (*) Tsunami! Em 26 de dezembro de 2004, um forte terremoto ocorreu na costa da Sumatra e provocou ondas imensas que mataram cerca de 200 mil pessoas. Os satélites que observavam essas ondas do espaço mediram 800 km de uma crista de onda para a seguinte, e um período entre ondas de 1 h. Qual era a velocidade dessas ondas em m/s e km/h em alto mar? A sua resposta ajuda você a entender por que as ondas causaram tamanha devastação?

R: $v = 222 \text{ m/s} \approx 800 \text{ km/h}$.

30. (*) A figura abaixo mostra duas fotografias tiradas em instantes de tempo diferentes de uma corda na qual se propaga, no sentido positivo do eixo x , uma onda harmônica transversal $y(x, t)$. A primeira fotografia (linha cheia) foi tirada no instante de tempo $t = 0$ e a segunda (linha tracejada) no instante de tempo $t = 0,50 \text{ s}$.



(a) Determine a velocidade v de propagação da onda na corda.

R: $v = 2 \text{ m/s}$

- (b) Determine a amplitude A , o número de onda, a frequência angular ω , a constante de fase δ e escreva a equação do perfil de onda $y(x, t)$.

R: $A = 0,1 \text{ m}$, $k = 0,5\pi \text{ m}^{-1}$, $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$, $\delta = 0$, $y(x, t) = 0,1 \cos(\frac{\pi}{2}x - \pi t) \text{ m}$

- (c) Determine a velocidade transversal máxima de um ponto da corda.

R: $v_{max} = 0,1\pi \text{ m/s}$

31. (*) Verifique explicitamente que as seguintes funções são soluções da equação de onda:

(a) $y(x, t) = k(x + vt)$;

(b) $y(x, t) = Ae^{ik(x-vt)}$, onde A e k são constantes e $i = \sqrt{-1}$;

32. (**) A função de onda de uma onda harmônica numa corda é:

$$y(x, t) = 0,001 \text{ sen}(62,8x + 314t)$$

estando x e y em metros e t em segundos. Responda:

- (a) Em que sentido a onda avança e qual a sua velocidade?

R: Sentido $-\hat{x}$, $v = 5 \text{ m/s}$

- (b) Calcule o comprimento de onda λ , a frequência f e o período T da onda.

R: $\lambda = 10 \text{ cm}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $T = 0,02 \text{ s}$

- (c) Qual a aceleração máxima de um ponto da corda.

R: $a_{max} = 98,6 \text{ m/s}^2$

33. (**) O perfil de uma onda transversal progressiva em uma corda muito longa é dado, em unidades do Sistema Internacional, por:

$$y(x, t) = 2 \times 10^{-2} \cos[2\pi(x/2 + 10t)]$$

com x e y em metros e t em segundos. Sabendo que a tensão aplicada na corda é de 100 N , determine:

(a) A amplitude A de vibração desta corda.

R: $A = 0,02 \text{ m}$

(b) O comprimento de onda λ e a frequência f (em Hz).

R: $f = 10 \text{ Hz}$, $\lambda = 2 \text{ m}$

(c) O sentido e a velocidade de propagação v da onda.

R: $v = 20 \text{ m/s}$ no sentido $-\hat{x}$

(d) A distância d , ao longo da corda, entre dois pontos cuja diferença de fase é $\pi/6$.

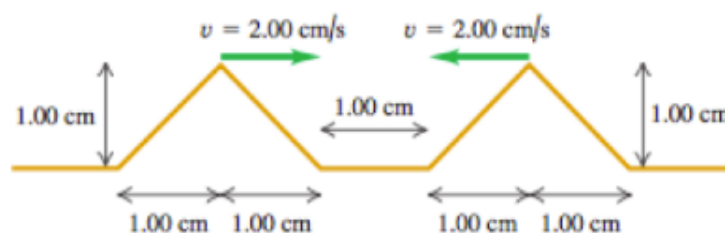
R: $d = 0,17 \text{ m}$

Interferência de ondas

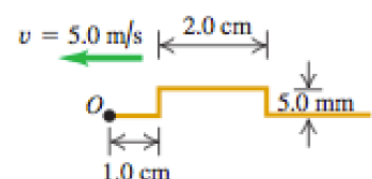
34. (***) Determine o deslocamento transversal y , em função do tempo e da posição x , da onda resultante da combinação de duas ondas senoidais que se propagam no mesmo sentido, possuem mesma frequência, têm amplitudes de 3 cm e 4 cm, e a onda de maior amplitude está com a fase adiantada de $\pi/2$ rad.

R: $y(x, t) = 5 \sin(kx - \omega t + 0,93) \text{ cm}$

35. (**) Dois pulsos ondulatorios triangulares estão se aproximando em uma corda esticada, como indicado na figura. Os dois pulsos são idênticos e se deslocam com velocidade igual a 2 cm/s. A distância entre as extremidades dianteiras dos pulsos é igual a 1 cm para $t = 0$. Desenhe a forma da corda para $t = 0,25 \text{ s}$, $t = 0,75 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$ e $t = 1,25 \text{ s}$.



36. (**) Um pulso ondulatorio deslocando-se sobre uma corda para $t = 0$ possui as dimensões indicadas na figura. A velocidade da onda é igual a 5,0 m/s.



- (a) Se o ponto O for uma extremidade fixa, desenhe a onda total sobre a corda para $t = 1,0 \text{ ms}$, $2,0 \text{ ms}$, $3,0 \text{ ms}$, $4,0 \text{ ms}$, $5,0 \text{ ms}$, $6,0 \text{ ms}$ e $7,0 \text{ ms}$;
- (b) Repita o item (a) quando o ponto O for uma extremidade livre.

Ondas estacionárias e modos normais

37. (*) Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por:

$$y_1 = 0,05 \cos(\pi x - 4\pi t) \quad (1)$$

$$y_2 = 0,05 \cos(\pi x + 4\pi t) \quad (2)$$

onde x , y_1 e y_2 estão em metros e t em segundos.

- (a) Qual é o menor valor positivo de x que corresponde a um nó?

R: $x = 0,5 \text{ m}$

- (b) Em quais instantes no intervalo $0 \leq t \leq 0,5$, a partícula em $x = 0$ terá velocidade nula?

R: $t = 0 \text{ s}$, $0,25 \text{ s}$ e $0,5 \text{ s}$.

38. (**) Uma corda de comprimento L presa nas extremidades $x = 0$ e $x = L$, submetida a uma tensão de 96 N , oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento transversal da corda é dado por

$$y(x, t) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin(6\pi t)$$

onde x e y são dados em metros e t em segundos.

- (a) Qual é o comprimento L da corda?

R: $L = 6 \text{ m}$

- (b) Qual é a massa da corda?

R: $m = 4,0 \text{ kg}$

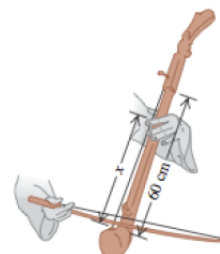
- (c) Calcule a velocidade transversal máxima de um ponto situado sobre um ventre da onda.

R: $v_y^{max} = 30\pi \text{ m/s}$

- (d) Se a corda oscilar no quinto harmônico, qual será o período de oscilação?

R: $T_5 = 0,2 \text{ s}$

39. (**) O segmento de uma corda de certo instrumento entre a ponte de apoio das cordas e a extremidade superior (a parte que vibra livremente) possui comprimento igual a 60,0 cm e massa igual a 2,0 g. Quando tocada, a corda emite um nota A_4 (440 Hz).



- (a) Em que ponto o violoncelista deve colocar o dedo (ou seja, qual é a distância x entre o ponto e a ponte de apoio das cordas) para produzir uma nota D_5 (587 Hz)? Nas duas notas A_4 e D_5 a corda vibra no modo fundamental.

R: 45 cm

- (b) Sem afinar novamente, é possível produzir uma nota G_4 (392 Hz) nessa corda? Justifique sua resposta.

R: não

40. (*) Uma corda sob tensão T_i oscila no terceiro harmônico com uma frequência f_3 , e as ondas na corda tem comprimento de onda λ_3 . Se aumentarmos a tensão da corda para $T_f = 4T_i$, de forma que a corda continue a oscilar no terceiro harmônico, qual será:

- (a) a frequência de oscilação em termos de f_3 .

R: $f = 2f_3$

- (b) o comprimento da onda em termos de λ_3 .

R: $\lambda = \lambda_3$

41. (*) Uma corda, submetida a uma tensão de 200 N e presa em ambas as extremidades, oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por:

$$y(x, t) = \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin(12\pi t)$$

onde $x = 0$ numa das extremidades da corda, x é dado em metros e t em segundos.

(a) Qual é o comprimento da corda?

R: $L = 4 \text{ m}$

(b) Qual é a velocidade escalar das ondas na corda?

R: $v = 24 \text{ m/s}$

(c) Qual é a massa da corda?

R: $m = 1,39 \text{ kg}$

(d) Se a corda oscilar num padrão de onda referente ao terceiro harmônico, qual será o período de oscilação?

R: $T = 0,111 \text{ s}$

42. (**) A corda B de uma guitarra feita de aço (densidade igual a 7800 kg/m^3) possui comprimento igual a $63,5 \text{ cm}$ e diâmetro igual a $0,406 \text{ mm}$. A frequência fundamental é $f = 247 \text{ Hz}$.

(a) Ache a tensão na corda.

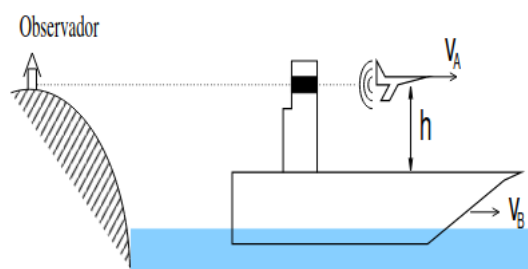
R: $99,4 \text{ N}$

(b) Quando a tensão F varia de uma pequena quantidade ΔF , a frequência f varia de uma pequena quantidade Δf . Mostre que:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{F}$$

Ondas sonoras

43. (*) Um jato com velocidade V_A realiza um “fly-by” (voo rasante) próximo à torre de controle de um porta-aviões, a uma altura $h = 50 \text{ m}$ do convés em um dia sem vento. O porta-aviões se move a uma velocidade $V_B = 17 \text{ m/s}$ na mesma direção do avião, conforme a figura.



Medições feitas pelo fabricante do jato indicam que a frequência do som das turbinas do avião é de 1500 Hz com intensidade sonora de 170 dB medida a 1 metro de distância. Considere a velocidade do som no ar em repouso como sendo 340 m/s.

- (a) O avião se afasta de um observador em terra situado à mesma altura do avião (figura). Durante o “fly-by”, esse observador mede um valor de 1000 Hz para a frequência do som dos jatos do motor. Calcule a velocidade do jato durante o “fly-by”.

R: $V_A = 170 \text{ m/s}$

- (b) Determine a frequência medida por um observador dentro da torre de controle.

R: $f_O = 1050 \text{ Hz}$

- (c) Calcule a intensidade sonora do ruído das turbinas do avião medida no convés (despreze efeitos de interferência).

R: $\beta_c = 136 \text{ dB}$

- (d) Calcule a altura mínima h_{min} para que o avião possa fazer o “fly-by” sem que a intensidade sonora no convés atinja o limiar da dor (130 dB).

R: $h_{min} = 100 \text{ m}$

Batimentos

44. (*) Dois violonistas tentam tocar a mesma nota de comprimento de onda igual a 6,50 cm ao mesmo tempo, mas um dos instrumentos está levemente desafinado e toca uma nota de comprimento igual a 6,52 cm. Qual é a frequência de batimentos que esses músicos ouvem quando tocam juntos?

R: 16 Hz

45. (**) Dois tubos de órgão, abertos em uma extremidade e fechados em outra, medem cada um 1,14 m de comprimento. O comprimento de um desses tubos é aumentado em 2 cm. Calcule a frequência de batimentos que eles produzem quando tocam juntos em sua frequência fundamental.

R: 1,3 Hz

46. (**) Duas cordas idênticas sob a mesma tensão F possuem uma frequência fundamental igual a f_0 . A seguir, a tensão em uma delas é aumentada de um valor bastante pequeno ΔF .

- (a) Se elas são tocadas ao mesmo em sua frequência fundamental, mostre que a frequência do batimento produzido é:

$$f_{bat} = \frac{1}{2} f_0 \frac{\Delta F}{F}$$

- (b) Duas cordas de violino idênticas, quando estão em ressonância e esticadas com a mesma tensão, possuem uma frequência fundamental igual a 440 Hz. Uma das cordas é afinada novamente, tendo sua tensão aumentada. Quando isso é feito, ouvimos 1,5 batimentos por segundo quando as duas cordas são puxadas simultaneamente em seus centros. Em que porcentagem variou a tensão na corda?

R: $\Delta T = 0,7 \%$