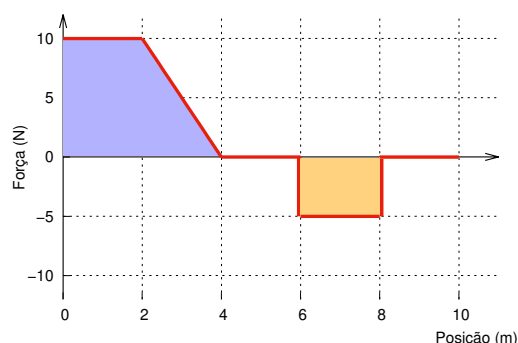


Instituto de Física
Universidade de São Paulo
GABARITO - Prova 2

4302111 - Física I

28/mai/2025

Enunciado das questões 1-2: Um objeto de massa $m = 2/5 \text{ kg}$ move-se ao longo do eixo x sob a ação de uma força conservativa paralela ao movimento cuja dependência com a posição é dada no gráfico abaixo. O objeto encontra-se inicialmente em repouso na posição $x = 0 \text{ m}$, e não há outras forças relevantes atuando.



Questão 1 (5 pontos) Qual é o trabalho desta força entre $x = 0 \text{ m}$ e $x = 10 \text{ m}$?

Questão 2 (5 pontos) Qual é a velocidade do objeto em $x = 5 \text{ m}$?

Resolução:

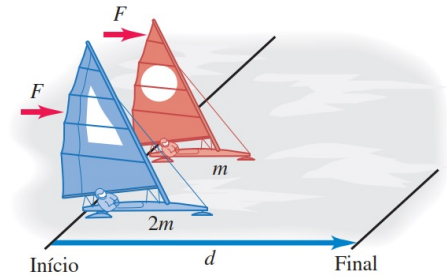
1. O trabalho de uma força $F(x)$ da posição inicial x_i até a posição final x_f é dada por $W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$, sendo que a interpretação geométrica da integral corresponde à área sob a curva $F(x)$ no intervalo $\{x_i, x_f\}$ fornecido. Intervalos em que $F(x) > 0$ geram trabalho positivo, e intervalos em que $F(x) < 0$, trabalho negativo. No caso do gráfico acima, o trabalho da força entre $x = 0 \text{ m}$ e $x = 10 \text{ m}$ é a área do trapézio (azul, 30 J) menos a área do retângulo (laranja, 10 J), $W_{10} = 20 \text{ J}$.

2. O trabalho desta força resultante entre $x = 0 \text{ m}$ e $x = 5 \text{ m}$ (na figura acima, $W_5 = 30 \text{ J}$) equivale à variação da energia cinética do objeto. Como em $x = 0 \text{ m}$ o objeto está em repouso, temos

$$W_5 = 30 \text{ J} = \Delta K = K_f - K_i^0 = \frac{1}{2}mv_5^2 \quad \Rightarrow \quad v_5 = \sqrt{\frac{2}{m}W_5} = \sqrt{\frac{2}{2/5}30} = \sqrt{5 \times 30} = \boxed{5\sqrt{6} \text{ m/s}}$$

Prova	$W_{10} \text{ (J)}$	$W_5 \text{ (J)}$	$m \text{ (kg)}$	$v_5 \text{ (m/s)}$
A	20	30	$2/5$	$5\sqrt{6}$
B	60	80	$5/3$	$4\sqrt{6}$

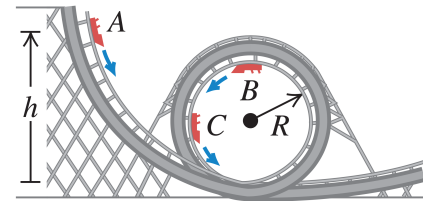
Questão 3 (5 pontos) Dois barcos apostam corrida sobre um lago horizontal congelado, deslizando sem atrito. Os barcos vermelho e azul possuem massas m e $2m$, respectivamente. A vela de um barco é idêntica à do outro, de modo que o vento exerce a mesma força constante $\vec{F}$ sobre cada barco. Os dois barcos partem do repouso e a distância entre a partida e a linha de chegada é igual a d . Qual dos dois barcos atravessa a linha final com a maior energia cinética (E_{cin})?



Resolução:

3. Os dois barcos estão sujeitos à mesma força $\vec{F}$ e percorrem a mesma distância d . Portanto, independentemente da massa de cada barco, a força do vento realiza o mesmo trabalho. Pelo teorema trabalho-energia cinética, como ambos partem do repouso, **ambos atravessam a linha final com a mesma energia cinética.**

Questão 4 (10 pontos) Um carro em uma montanha russa desloca-se sem atrito ao longo do trilho, como indicado na figura abaixo. Ele parte do repouso no ponto A, situado a uma altura $h = 7R/2$ acima da base do loop, de raio R .



Considere o carro como um objeto puntiforme de massa m e g o módulo da aceleração gravitacional. Qual expressão abaixo determina o módulo da força centrípeta agindo sobre o carro no ponto B, na parte mais alta do loop?

Resolução:

4. O módulo da força centrípeta, em qualquer parte de uma trajetória circular, é sempre dado por $F_{\text{centr}} = mv^2/R$. No caso do ponto B do loop, a força centrípeta é a soma vetorial da força normal e da força peso, mas isso não é importante para a resolução deste problema. O que precisamos é, de alguma forma, relacionar a velocidade escalar do carro no ponto B, v_B , com as demais grandezas especificadas. Como não há atrito entre o carro e os trilhos, usamos a conservação da energia mecânica total: $E_{\text{tot}} = K_i + U_i = K_f + U_f$. Considerando o ponto A como inicial, e o ponto B como final, temos

$$K_i^0 + U_i = K_f + U_f \Rightarrow mgh = \frac{mv_B^2}{2} + mg(2R) \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mg(h - 2R)$$

Multiplicando por 2 e dividindo por R a última igualdade acima, temos

$$\frac{2}{R} \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_B^2}{R} = F_{\text{centr}} = \frac{2}{R} mg(h - 2R) \Rightarrow \boxed{F_{\text{centr}} = mg \left(\frac{2h}{R} - 4 \right)}$$

Prova	h	F_{centr}
A	$7R/2$	$3mg$
B	$5R/2$	$1mg$

Enunciado das questões 5-6: Uma bomba de massa $M = 12 \text{ kg}$ desliza sobre um lago congelado com velocidade $\vec{v} = 20 \text{ m/s} \hat{i}$, em um sistema de coordenadas em que o plano xy coincide com a superfície do lago congelado. A bomba explode em dois fragmentos. Após a explosão, um dos fragmentos com massa $m_1 = 8 \text{ kg}$ move-se com velocidade $\vec{v}_1 = -10 \text{ m/s} \hat{i} - 5 \text{ m/s} \hat{j}$.

Questão 5 (10 pontos) Determine a velocidade $\vec{v}_2$ do fragmento de massa $m_2 = M - m_1$.

Questão 6 (5 pontos) Determine a velocidade do centro de massa dos dois fragmentos, após a explosão.

Resolução:

5. O momento linear total da bomba antes da explosão é $M\vec{v}$. Pela conservação do momento linear, após a colisão devemos ter

$$\vec{P}_{\text{tot,depois}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{v} \Rightarrow m_2\vec{v}_2 = M\vec{v} - m_1\vec{v}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \frac{M\vec{v} - m_1\vec{v}_1}{M - m_1}}$$

No caso da versão A da prova, $M = 12 \text{ kg}$, $m_1 = 8 \text{ kg}$, $\vec{v} = 20 \text{ m/s} \hat{i}$ e $\vec{v}_2 = (-10 \hat{i} - 5 \hat{j}) \text{ m/s}$,

$$\vec{v}_2 = \frac{12 \times 20 \hat{i} - 8 \times (-10 \hat{i} - 5 \hat{j})}{12 - 8} \text{ m/s} = \frac{240 \hat{i} + 80 \hat{i} + 40 \hat{j}}{4} \text{ m/s} = (80 \hat{i} + 10 \hat{j}) \text{ m/s}.$$

6. A velocidade do centro de massa dos dois fragmentos, após a colisão, é igual à velocidade da bomba antes de explodir, pois não há força externa resultante agindo no sistema como um todo (as forças que agem na explosão são forças internas ao sistema), nem há perda de massa. Tal afirmação pode ser demonstrada a partir da conservação do momento linear total. A posição do centro de massa (CM) dos dois fragmentos, para um instante de tempo qualquer, é dada por

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}.$$

Derivando a expressão acima em relação ao tempo, obtemos a velocidade do CM:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M} = \frac{\vec{P}_{\text{tot,depois}}}{M}.$$

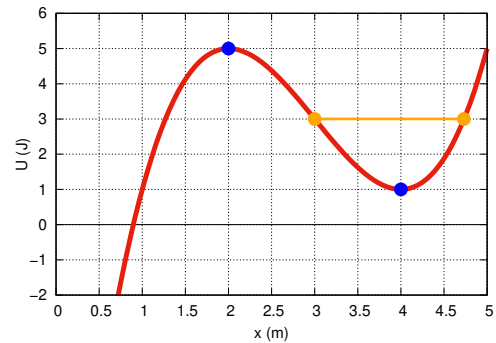
A última igualdade resulta da própria definição do momento linear total dos dois fragmentos, depois da explosão. Mas $\vec{P}_{\text{tot,depois}} = \vec{P}_{\text{tot,antes}} = M\vec{v}$, o que prova a igualdade $\boxed{\vec{V}_{CM} = \vec{v}}$.

Prova	M (kg)	$\vec{v} = \vec{V}_{CM}$ (m/s)	m_1 (kg)	$\vec{v}_1$ (m/s)	m_2 (kg)	$\vec{v}_2$ (m/s)
A	12	$20 \hat{i}$	8	$-10 \hat{i} - 5 \hat{j}$	4	$80 \hat{i} + 10 \hat{j}$
B	14	$20 \hat{i}$	8	$-10 \hat{i} - 6 \hat{j}$	6	$60 \hat{i} + 8 \hat{j}$

Questão 7 (30 pontos) A figura ao lado mostra o gráfico da função energia potencial

$$U(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 15,$$

sendo x dado em metros e U em joules. Sabe-se que uma partícula de massa $m = 1$ kg está sujeita a esse potencial.



- (a) (6 pontos) Obtenha a expressão da força $F(x)$ que está atuando na partícula, dentro do intervalo especificado na figura.
- (b) (6 pontos) Identifique os pontos de equilíbrio e classifique-os.

Sabendo que a partícula é abandonada, a partir do repouso, em $x = 3$ m, responda:

- (c) (6 pontos) Qual é o módulo da força que atua nela neste ponto? Em que sentido a partícula passará a se mover?
- (d) (6 pontos) Em que ponto a velocidade da partícula será máxima e qual será o seu valor?
- (e) (6 pontos) Indique, no gráfico, quais são os valores máximo e mínimo de x permitidos no movimento da partícula.

Resolução:

- (a) Vimos, em aula, que a força é obtida a partir da função energia potencial através de

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}.$$

Derivando a expressão fornecida,

$$U(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = 3x^2 - 18x + 24 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(x) = -3x^2 + 18x - 24}$$

- (b) Os pontos de equilíbrio são os máximos e mínimos locais da curva da energia potencial, caracterizados pela inclinação (derivada) nula. Fisicamente, significa força nula. Eles estão caracterizados no gráfico pelas bolas azuis, localizados em $x = 2$ m, $U = 5$ J e em $x = 4$ m, $U = 1$ J.

Estes pontos podem ser matematicamente determinados resolvendo a equação

$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \text{ m}, \\ x = 4 \text{ m}. \end{cases}$$

O ponto $x = 2$ m é um ponto de equilíbrio instável, um ponto de máximo local da curva $U(x)$ por x . Fisicamente, um objeto deixado nesta posição em repouso tende a permanecer em repouso, mas qualquer pequena perturbação tira facilmente o objeto deste estado. Para deslocamentos à esquerda ($x < 2$ m), o objeto fica sujeito a uma força negativa (inclinação de $U(x)$ positiva, força negativa) e de intensidade crescente, que faz o objeto se afastar cada vez mais deste ponto de equilíbrio. Raciocínio análogo se aplica para deslocamentos à direita de $x = 2$ m.

O ponto $x = 4$ m é um ponto de equilíbrio estável (mínimo local). Deslocamentos à esquerda (direita) do ponto de equilíbrio induzem uma força restauradora, que age no sentido oposto ao deslocamento.

- (c) a expressão para a força foi obtida no item (a), portanto, basta apenas substituir o valor $x = 3 \text{ m}$ nela para responder à questão:

$$F(x = 3 \text{ m}) = -3 \times 3^2 + 18 \times 3 - 24 = -27 + 54 - 24 \Rightarrow \boxed{F(x = 3 \text{ m}) = 3 \text{ N}}$$

O sinal é positivo, logo, a força atua no sentido positivo do eixo x . Partindo do repouso, a partícula começará a se mover para a direita, no mesmo sentido da força.

- (d) Em $x = 3 \text{ m}$ a partícula é abandonada do repouso. Logo, nesta posição ela possui energia cinética $K = 0 \text{ J}$ e energia potencial $U = 3 \text{ J}$, como se pode ler no gráfico. Nestas condições, a energia mecânica total da partícula é, portanto, $E_{\text{tot}} = K + U = 3 \text{ J}$. Dentro da região permitida para o movimento da partícula (resposta ao item (e)), a posição de menor energia potencial, $x = 4 \text{ m}$, é a de maior energia cinética, consequentemente, de maior velocidade. Temos que

$$U(x = 4 \text{ m}) = 1 \text{ J} \Rightarrow K_{\text{max}} = E_{\text{tot}} - U(x = 4 \text{ m}) = 2 \text{ J} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2},$$

$$\Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_{\text{tot}} - U)} = \sqrt{\frac{2}{1 \text{ kg}} \times 2 \text{ J}} \Rightarrow \boxed{v_{\text{max}} = 2 \text{ m/s}}$$

- (e) No gráfico de $U(x)$ por x , a energia mecânica total $E_{\text{tot}} = 3 \text{ J}$ (segmento de reta laranja) define o intervalo $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$ no qual a partícula pode se movimentar. Neste caso, $x_{\text{min}} = 3 \text{ m}$ e $x_{\text{max}} \approx 4,7 \text{ m}$.

Questão 8 (30 pontos) Um policial criminalístico, formado em física, procura desvendar um crime ocorrido dentro de um bar. Durante uma tentativa de assalto, criminosos atiraram em uma caixa de madeira que estava em cima do balcão do bar. A bala da arma alojou-se na caixa e ambas deslizaram em cima do balcão até parar. O policial suspeita que tenha sido usada no crime uma arma de calibre 12. Ele então assume que a bala foi disparada com velocidade $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$ ($v_0 > 0$), mediu as massas m da bala e M da caixa, respectivamente, e o coeficiente de atrito cinético μ_c entre a caixa e o balcão. Todo o movimento ocorre na direção do eixo x . Ele então começa a fazer contas para ver se sua hipótese sobre a velocidade da bala é compatível com a distância que a caixa deslizou.

- (a) (6 pontos) Determine a velocidade (**vetor!**) do sistema caixa mais bala, imediatamente após a bala se colidir com a caixa.
- (b) (6 pontos) Determine o impulso (**vetor!**) que a caixa recebe devido ao impacto com a bala.
- (c) (12 pontos) Obtenha a expressão para a distância D que a caixa (com a bala alojada) deslizou, em termos das massas, μ_c e v_0 .
- (d) (6 pontos) Considerando $v_0 = 420 \text{ m/s}$, $m = 50 \text{ g}$, $M = 20m = 1 \text{ kg}$ e que o tempo de alojamento da bala na caixa foi de $0,01 \text{ s}$, obtenha a força média que atuou no impacto da bala.

Resolução:

- (a) Antes da colisão, o momento linear total do sistema bala + caixa é dado por $\vec{P}_{\text{tot}} = mv_0 \hat{i}$. Imediatamente após a colisão, temos $\vec{P}_{\text{tot}} = (m + M)\vec{v}$. Aplicando a conservação do momento linear total,

$$mv_0 \hat{i} = (m + M)\vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{m}{m + M} v_0 \hat{i}}$$

(b) O impulso que a caixa recebe é igual à variação de seu momento linear. O momento linear final da caixa é $M\vec{v}$ e seu momento linear inicial é nulo. Portanto, $\vec{I}_{\text{caixa}} = \frac{Mm}{m+M} v_0 \hat{i}$.

(c) Durante o deslizamento da caixa a única força que realiza trabalho é a força de atrito cinético. Pelo teorema trabalho-energia cinética,

$$W_{\text{res}} = W_{\text{at}} = \Delta K \Rightarrow -\mu_c(m+M)gD = \cancel{K_f}^0 - K_i = -(m+M)\frac{v^2}{2} \Rightarrow D = \frac{v^2}{2\mu_c g}.$$

Note que o trabalho da força de atrito é negativo, pois a força de atrito está no sentido oposto ao deslocamento. Substituindo v pelo módulo da velocidade encontrada no item (a), temos

$$D = \frac{m^2 v_0^2}{2\mu_c g(m+M)^2}$$

(d) Para obter a força média que atuou no impacto da bala com a caixa, basta dividir a variação de momento linear da caixa pelo intervalo de tempo Δt fornecido. A variação do momento linear $\Delta \vec{p}_{\text{caixa}}$ é igual ao impulso correspondente, que foi determinado no item (b). Portanto,

$$\vec{F}_M = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{caixa}}}{\Delta t} = \frac{\vec{I}_{\text{caixa}}}{\Delta t} = \frac{Mm}{(m+M)\Delta t} v_0 \hat{i} = \frac{20\cancel{m}^2 \overset{m}{m}}{21\cancel{m}^1 \Delta t} v_0 \hat{i} = \frac{20m}{21\Delta t} v_0 \hat{i},$$

onde usamos o fato da massa da caixa M ser 20 vezes o valor da massa da bala m . Substituindo as demais grandezas pelos valores fornecidos temos

$$\vec{F}_M = \frac{20 \times \cancel{0,05}^5 \text{ kg}}{\cancel{21}^1 \times \cancel{0,01}^1 \text{ s}} \times \cancel{420}^{20} \text{ m/s} \hat{i} = 20 \times 5 \times 20 \text{ kg.m/s}^2 \hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_M = 2000 \text{ N} \hat{i}}$$