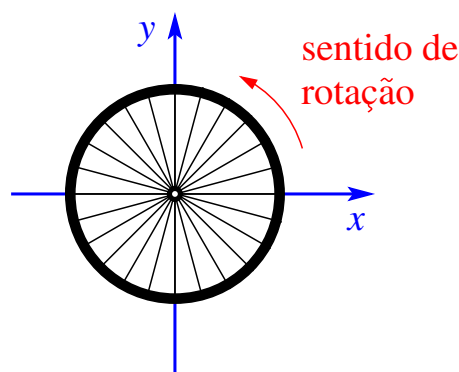


Instituto de Física
Universidade de São Paulo
GABARITO - Prova 3

4302111 - Física I

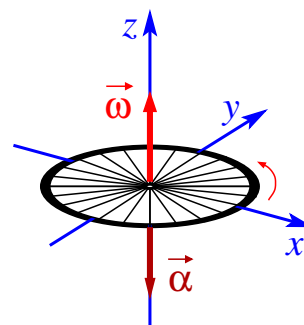
02/jul/2025

Enunciado das questões 1-2: Um ciclista reserva um final de semana para fazer reparos em sua bicicleta. Ele deita a bicicleta na horizontal (plano xy de um sistema de coordenadas) de forma que o eixo de rotação da roda dianteira fique na vertical, coincidindo com o eixo z . O ciclista põe a roda para girar, tal que um ponto na extremidade da roda adquiere velocidade inicial $1/5$ m/s em módulo, descrevendo uma trajetória circular no plano xy no sentido anti-horário, visto de cima para baixo. O raio desta roda é de $3/10$ m. Depois de $5/3$ s, a roda para de girar por conta do atrito do suporte da roda com seu eixo.



Questão 1 (5 pontos) Determine os módulos da velocidade angular inicial e da aceleração angular média neste intervalo.

Questão 2 (10 pontos) Determine as direções e sentidos da velocidade angular inicial e da aceleração angular média, respectivamente.



Resolução:

1. Um ponto localizado na extremidade da roda que se movimenta com velocidade escalar v tem o módulo da velocidade angular dado por $\omega = v/R$, sendo R o raio da roda, que também é a distância deste ponto ao eixo de rotação. O módulo da velocidade angular inicial é, portanto,

$$\omega_i = \frac{v_i}{R} = \frac{1/5 \text{ m/s}}{3/10 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{\omega_i = \frac{2}{3} \text{ rad/s}}$$

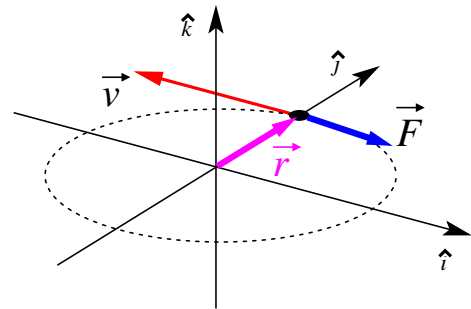
O módulo da aceleração angular média é a razão entre o módulo da variação da velocidade angular dividido pelo intervalo de tempo Δt que a roda levou até parar de girar. Logo,

$$\alpha_{\text{med}} = \frac{|0 - \omega_i|}{\Delta t} = \frac{2/3 \text{ rad/s}}{5/3 \text{ s}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{5} \text{ rad/s}^2}$$

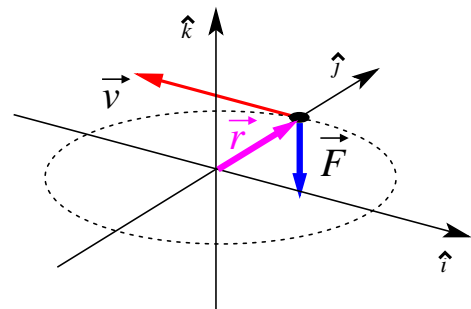
2. A velocidade angular $\vec{\omega}$ segue a regra da mão direita. Portanto, um objeto girando no sentido anti-horário no plano xy tem $\vec{\omega}$ orientado na direção $+\hat{k}$, conforme ilustra a figura acima.

Como a roda está parando (desacelerando), a magnitude de $\vec{\omega}$ está diminuindo com o tempo, logo, a aceleração angular $\vec{\alpha}$ está no sentido oposto ao da velocidade angular. Neste caso, a aceleração angular está no sentido negativo do eixo z ($-\hat{k}$).

Questão 3 (5 pontos) Um disco de hóquei move-se sobre uma pista de gelo em movimento circular uniforme de raio R , no plano xy , atada à extremidade de uma corda, com momento angular de módulo L em relação ao centro do círculo, onde está fixa a outra extremidade da corda. Um jogador dá uma tacada no disco na direção x , no ponto $+R\hat{j}$. Isto causa uma variação do momento angular em que direção?



Questão 4 (5 pontos) Um disco de hóquei move-se sobre uma pista de gelo em movimento circular uniforme de raio R , no plano xy , atada à extremidade de uma corda, com momento angular de módulo L em relação ao centro do círculo, onde está fixa a outra extremidade da corda. Um jogador dá uma tacada no disco na direção $-z$, no ponto $+R\hat{j}$. Isto causa uma variação do momento angular em que direção?



Resolução:

A tacada do jogador no disco é descrita como uma força, indicada na figura, que age por um intervalo de tempo muito pequeno. Esta força gera um torque, que por sua vez, é a própria variação do momento angular dentro de um intervalo de tempo muito pequeno. Resolver as questões 3 e 4 se resume, portanto, a determinar o torque gerado por esta força. O ponto de aplicação da força, indicada no enunciado, está representado pelo vetor $\vec{r}$ da figura, que não estava na figura original da prova. O torque é dado pelo produto vetorial, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, cuja direção é obtida ou pela regra da mão direita (muito mais fácil) ou pelo produto vetorial algebricamente, como resumido abaixo.

3. Direção de $\vec{\tau}$: $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$.

4. Direção de $\vec{\tau}$: $\hat{j} \times (-\hat{k}) = -\hat{i}$.

Enunciado das questões 5-6: Um ioiô de massa m tem sua corda enrolada em torno de seu cilindro menor, de raio R . Você mantém presa a extremidade da corda enquanto o ioiô é liberado a partir do repouso. A corda se desenrola sem distensão ou deslizamento. O momento de inércia do ioiô, em torno de seu eixo de rotação, é dado por $I = \frac{3}{4}mR^2$.

Questão 5 (10 pontos) Determine a velocidade escalar do centro de massa do ioiô após se deslocar de uma altura $h = 6R$.

Questão 6 (5 pontos) Caso o ioiô fosse substituído por um cilindro homogêneo de mesma massa m e raio R , como se compararia v_{CM} com o caso anterior?

Resolução:

5. As únicas forças atuando na queda do ioiô são a força que mantém presa a extremidade da corda, que não gera trabalho (pense no porquê), e a força gravitacional, que é conservativa. Portanto, utilizamos a conservação da energia mecânica total. Considerando como o zero de energia potencial gravitacional a posição final do ioiô, no instante inicial temos

$$E_{\text{tot}} = mgh = 6mgR$$

enquanto que no instante final temos apenas energia cinética, que é decomposta em energia cinética de translação do centro de massa do ioiô, mais energia cinética de rotação em relação ao centro de massa do ioiô:

$$E_{\text{tot}} = \frac{mv_{CM}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv_{CM}^2}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} mR^2 \omega^2 = \frac{mv_{CM}^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{8} mv_{CM}^2,$$

sendo que, na penúltima passagem, utilizamos o fato da corda não deslizar sobre o ioiô, o que garante a condição $R\omega = v_{CM}$. Igualando E_{tot} inicial e final,

$$6m^1gR = \frac{7}{8} m^1v_{CM}^2 \Rightarrow v_{CM}^2 = \frac{48}{7}gR \Rightarrow \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{48}{7}gR}}$$

6. Desenvolvendo a resolução da questão anterior, mas para um I arbitrário, chegamos ao resultado

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}.$$

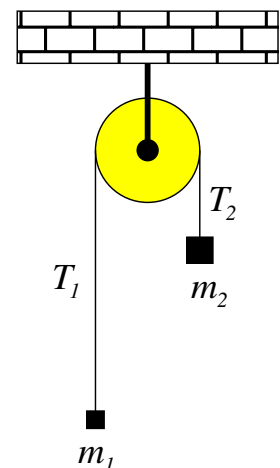
Perceba que a resolução deste problema é bastante análoga à do rolamento sem deslizamento de objetos sobre o plano inclinado. Abordamos em aula este último problema, partindo de uma altura h arbitrária, e com momento de inércia I arbitrário. Pela fórmula acima, e pelas discussões feitas em sala de aula, vemos que quanto menor o momento de inércia do objeto (em relação ao seu centro de massa), maior será sua velocidade (escalar) final de centro de massa, e vice-versa. Comparando o momento de inércia do ioiô com a de um cilindro homogêneo equivalente, vemos que

$$I_{\text{ioio}} = \frac{3}{4} mR^2 \quad e \quad I_{\text{cilindro}} = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{2}{4} mR^2,$$

em que colocamos as frações à frente do termo mR^2 no mesmo denominador comum para facilitar a comparação. Desta forma, vemos claramente que $I_{\text{cilindro}} < I_{\text{ioio}}$, e portanto,

$$\boxed{v_{CM} \text{ seria maior que o caso anterior.}}$$

Questão 7 (30 pontos) A figura ao lado mostra duas massas, m_1 e $m_2 > m_1$, ligadas por um fio sem massa e inextensível passando por uma polia não-homogênea de massa M e raio R . As tensões no fio adjacentes às massas m_1 e m_2 são T_1 e T_2 , respectivamente. A polia está presa à extremidade de um cabo, que por sua vez, tem a sua outra extremidade fixa a um teto. Como $m_2 > m_1$, as massas adquirem aceleração de módulo a . Ignore o atrito entre a polia e seu eixo de rotação, e utilize g para o módulo da aceleração gravitacional na superfície da Terra.



- (a) (3 pontos) Desenhe o diagrama de corpo livre da polia.
- (b) (9 pontos) Determine todos os torques (**vetores!**) agindo na polia, e aplicando a segunda lei de Newton para o movimento rotacional, obtenha a expressão que determina o momento de inércia da polia em termos das grandezas especificadas no enunciado.

Para os próximos itens, considere $m_2 = 3m_1$ e $T_2 = 2T_1$.

- (c) (6 pontos) Aplicando a segunda lei de Newton para as massas, obtenha a respectiva aceleração a e a tensão T_1 em termos de g e m_1 .
- (d) (6 pontos) Obtenha o momento de inércia da polia, desta vez, apenas em termos de m_1 e R .
- (e) (6 pontos) A massa da polia é tal que $M = 8m_1$. Reescreva o resultado do item anterior, desta vez, apenas em termos de M e R . Com base na forma da expressão obtida, qual dos perfis abaixo mais se aproxima da distribuição de massa na polia? (Quanto mais escura a região, maior sua densidade.) Lembre-se que o momento de inércia de alguns objetos típicos estão no formulário.



Perfil 1



Perfil 2



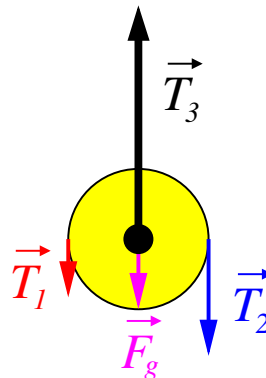
Perfil 3



Perfil 4

Resolução:

(a) $\vec{T}_3 = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g$



- (b) Considerando o eixo da polia como ponto de referência, temos

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \vec{r}_g \times \vec{0} + \vec{r}_3 \times \vec{0} + \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = I_{CM} \vec{\alpha} \Rightarrow RT_1 \hat{k} - RT_2 \hat{k} = -I_{CM} \alpha \hat{k}$$

$$\Rightarrow R(T_2 - T_1) = I_{CM} \alpha = I_{CM} \frac{a}{R} \Rightarrow \boxed{I_{CM} = \frac{R^2(T_2 - T_1)}{a}}$$

Os torques $\vec{\tau}_g$ e $\vec{\tau}_3$, respectivamente associados às forças $\vec{F}_g$ e $\vec{T}_3$, são nulos, pois a distância entre o ponto de aplicação e o ponto de referência é o vetor nulo $\vec{0}$. O torque $\vec{\tau}_i$ associado à força $\vec{T}_i$, sendo $i = 1, 2$, possui módulo $\tau_i = RF_i$ (pois o ângulo entre a força e a posição do ponto de aplicação da mesma em relação ao ponto de referência é de 90 graus) e orientação dada pela regra da mão direita.

(c) A segunda lei de Newton aplicada às massas m_1 e m_2 , com $m_2 = 3m_1$ e $T_2 = 2T_1$, resulta em

$$\begin{cases} m_2g - T_2 = m_2a \\ T_1 - m_1g = m_1a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m_1g - 2T_1 = 3m_1a \\ T_1 - m_1g = m_1a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-2)m_1g = (3+2)m_1a \\ (3+3)m_1g - (2+3)T_1 = 0 \end{cases}$$

Com estas duas condições, obtemos

$$\boxed{a = \frac{g}{5}} \quad \boxed{T_1 = \frac{6}{5} m_1g}$$

(d) Substituindo a e T_1 acima obtidos na expressão de I_{CM} temos

$$I_{CM} = \frac{R^2(T_2 - T_1)}{a} = R^2 \frac{T_1}{a} = R^2 \frac{6}{5} m_1g \times \frac{1}{\cancel{g}} \times \frac{5}{\cancel{1}} \Rightarrow \boxed{I_{CM} = 6m_1R^2}$$

(e) Escrevendo o resultado anterior em termos de $M = 8m_1$,

$$I_{CM} = 6m_1R^2 = \frac{6}{8} \times 8m_1R^2 = \frac{6}{8}MR^2 \Rightarrow \boxed{I_{CM} = \frac{3}{4}MR^2}$$

Ao compararmos a expressão acima com

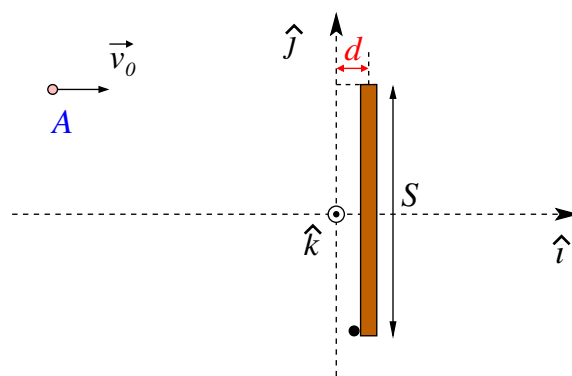
$$I_{\text{disco homog.}} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{2}{4}MR^2, \quad I_{\text{anel homog.}} = MR^2 = \frac{4}{4}MR^2,$$

temos

$$I_{\text{disco homog.}} < I_{CM} < I_{\text{anel homog.}}$$

o que indica que há uma densidade de massa maior concentrada na borda do disco do que mais próxima ao seu centro geométrico. Portanto, o perfil que mais se adequa à polia é o Perfil 1.

Questão 8 (30 pontos) Uma esfera A de massa m , feita de massa de vidro, desliza sobre uma superfície de gelo com atrito desprezível. A superfície de gelo está contida no plano xy de um sistema de coordenadas. A velocidade inicial da esfera A é dada por $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$. Próximo à origem do sistema de coordenadas encontra-se, inicialmente em repouso, um sistema composto por um bastão de comprimento S , massa M e uma esfera de massa m grudada em uma das extremidades do bastão, conforme mostra a figura ao lado. A esfera A colide com a outra extremidade do bastão, em um choque completamente inelástico.

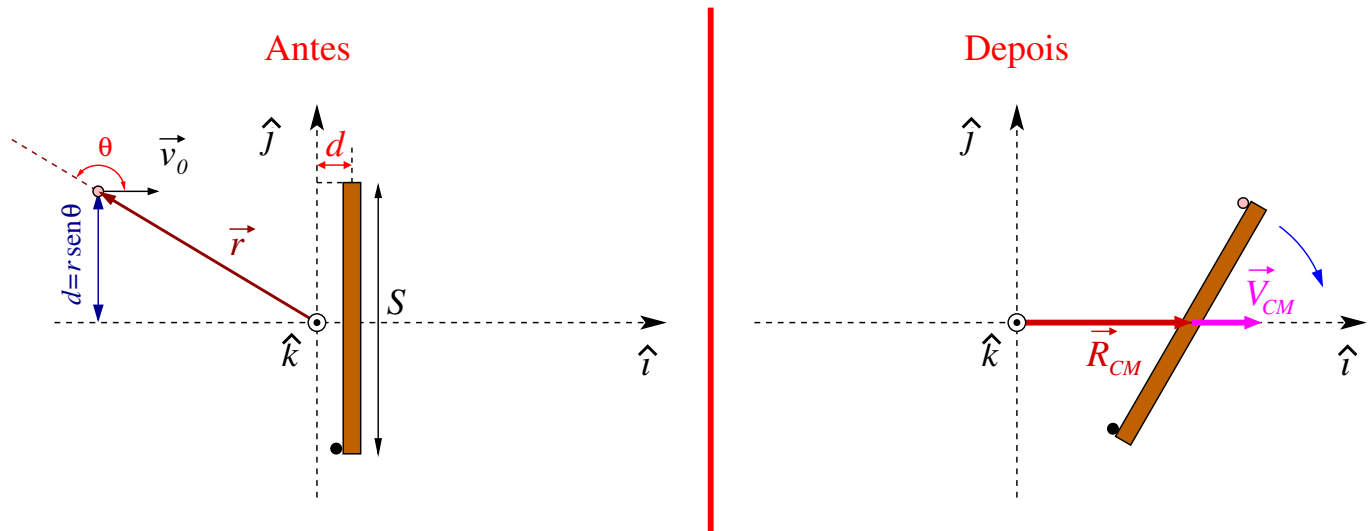


Neste problema, despreze o tamanho das esferas, assumindo-as como puntiformes. Para os três primeiros itens a seguir, escreva suas respostas em termos de v_0 , m , M e S .

- (9 pontos) Determine o **vetor** momento angular do sistema em relação à origem do sistema de coordenadas, antes da colisão.
- (3 pontos) Determine o **vetor** velocidade do centro de massa do sistema, após a colisão.

- (c) (9 pontos) Obtenha o **vetor** velocidade angular de rotação do sistema, após a colisão.
- (d) (9 pontos) Considere $v_0 = 2,5 \text{ m/s}$ e $M = 4m$. Sabendo que, após a colisão, o sistema gira em torno de seu centro de massa com velocidade angular de 3 rad/s em módulo, determine o comprimento S do bastão.

Resolução:



- (a) A figura acima mostra as situações antes e depois da colisão. Antes da colisão (figura à esquerda), o momento linear inicial é devido à esfera A, constante e dado por $\vec{p}_i = m\vec{v}_0 = mv_0\hat{i}$. Pela figura, percebemos que o vetor posição em relação ao ponto de referência, que no caso é a origem, varia ao longo da trajetória. Porém, a distância perpendicular ao momento linear, que é a que determina o módulo de $\vec{L}$, é constante e igual a $S/2$. O módulo do momento angular antes da colisão é dado por

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}_i| = r p_i \sin \theta = \frac{S}{2} p_i = \frac{S}{2} mv_0.$$

Pela regra da mão direita, temos que $\vec{L}$ está na direção $-\hat{k}$, portanto, $\boxed{\vec{L} = -\frac{S}{2} mv_0 \hat{k}}.$

- (b) Como a força resultante agindo sobre o sistema formado pelas 2 esferas e a barra é igual a zero, o momento linear total do sistema deve ser conservado,

$$mv_0\hat{i} = (2m + M)\vec{V}_{CM} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{mv_0}{(2m + M)}\hat{i}}.$$

- (c) Tomando como ponto de referência a origem do sistema de coordenadas, como não há forças externas que exercem torques sobre o sistema, o momento angular total deve permanecer o mesmo, antes e depois da colisão. Depois da colisão, o momento angular total é igual ao momento angular de rotação em torno do centro de massa do sistema, visto que o momento angular de translação em relação à origem ($\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}$) é nulo (entenda o porquê observando a

figura acima). Por fim, obtemos a velocidade angular do sistema a partir do momento angular de rotação. Resumindo,

$$\vec{L}_{\text{tot,antes}} = \vec{L}_{\text{tot,depois}} \Rightarrow -\frac{S}{2}mv_0\hat{k} = \underbrace{\vec{R}_{CM} \times (M\vec{V}_{CM})}_{\vec{0}} + I_{CM}\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{Smv_0}{2I_{CM}}\hat{k}.$$

O momento de inércia do sistema, após a colisão, em relação ao centro de massa é dado por

$$I_{CM} = I_{\text{barra}, CM} + m\left(\frac{S}{2}\right)^2 + m\left(\frac{S}{2}\right)^2 = \frac{MS^2}{12} + \frac{mS^2}{2} = \frac{S^2}{12}(M + 6m).$$

Portanto,

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{6mv_0}{S(M + 6m)}\hat{k}}$$

(d) Fornecidos os valores do módulo da velocidade angular ω , o módulo da velocidade v_0 da esfera A e a relação $M = 4m$, obtemos S a partir do resultado do item anterior,

$$\omega = \frac{6mv_0}{S(M + 6m)} \Rightarrow S = \frac{6mv_0}{\omega(M + 6m)} = \frac{6\cancel{m}^1v_0}{10\cancel{m}^1\omega} = \frac{\cancel{3}^1\cancel{2}^1\cancel{5}^1\text{ m/s}}{\cancel{3}^2\cancel{3}^1\text{ rad/s}} \Rightarrow \boxed{S = 0,5\text{ m}}$$

FORMULÁRIO

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta (\hat{a} \times \hat{b}).$$

$$W_{if} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta, \quad \Delta E_{\text{cin}} = \Delta K_{\text{tot}} = W_{if},$$

$$E_{\text{cin}} = K_{\text{tot}} = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{M_{\text{tot}} V_{CM}^2}{2} + \frac{I_{CM} \omega^2}{2}, \quad E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = K + U,$$

$$\vec{J} = \Delta \vec{P}_{CM} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{res}} dt, \quad \vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{CM}}{\Delta t}, \quad \vec{P}_{CM} = M_{\text{tot}} \vec{V}_{CM},$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad \vec{V}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i},$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \quad \vec{\tau}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt},$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{trans}} + \vec{L}_{\text{rot}}, \quad \vec{L}_{\text{trans}} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM}, \quad \vec{L}_{\text{rot}} = I_{CM} \vec{\omega}, \quad \vec{\tau}_{\text{rot}} = I_{CM} \vec{\alpha}.$$

$$I_{CM} = \sum_i m_i r_i^2 \Rightarrow \int r^2 dm, \quad I_O = I_{CM} + M_{\text{tot}} D^2,$$

Momentos de inércia de alguns objetos homogêneos

$$I_{\text{barra}, CM} = \frac{ML^2}{12}, \quad I_{\text{barra}, \text{extremidade}} = \frac{ML^2}{3},$$

$$I_{\text{cilindro ou disco}, CM} = \frac{MR^2}{2}, \quad I_{\text{tubo ou anel muito fino}, CM} = MR^2,$$

$$I_{\text{esfera maciça}, CM} = \frac{2MR^2}{5}, \quad I_{\text{casca esférica}, CM} = \frac{2MR^2}{3}.$$

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n x^{n-1}, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)},$$

$$\int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{(n+1)} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)}.$$